Асимптотические свойства многочленов от гауссовских случайных величин

Агафонцев Б.В., Богачев В.И.

Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин и $\{f_n\}$ – последовательность измеримых многочленов степени не выше d от гауссовского вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Цель этой работы – получение оценок дисперсий случайных величин f_n на основе информации о случайных величинах $f_n + g_n$, где случайная величина g_n измерима относительно σ-алгебры σ_n, порожденной величинами ξ_i, $i > n$. Оказывается, что возмущения g_n указанного вида сохраняют тот известный эффект, что для элементов винеровского хаоса различные слабые виды ограниченности влекут ограниченность в L^p. В конце работы будут указаны и более широкие классы распределений с аналогичными свойствами. Одним из следствий является характеризация измеримых многочленов от ξ степени d как случайных величин вида $f(\xi)$ с тем свойством, что функция

$$t \mapsto f(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_n + tb_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$ почти наверное является многочленом степени d.

Результаты будут сформулированы в терминах измеримых функций на счетном произведении прямых $X := \mathbb{R}^\infty$ с гауссовской мерой γ, являющейся счетной степенью стандартной гауссовской меры γ_1 на прямой. Иначе говоря, мера γ есть распределение последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин. Напомним, что γ-измеримыми многочленами степени $d \geq 0$ называются γ-измеримые функции из замыкания $\mathcal{X}_d$ в $L^2(\gamma)$ множества всех многочленов степени d от конечного числа переменных. При этом функция от $x_1, \ldots, x_n$ естественным образом рассматривается как функция на $\mathbb{R}^\infty$, причем многочлены степени $m < d$ считаются многочленами степени d. Например, степенью $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ считается $k_1 + \cdots + k_n$, а также всякое большее натуральное число. Пространство $\mathcal{X}_0$ состоит из констант. Хорошо известно (см. [1, гл. 5]), что $\mathcal{X}_d$ совпадает с замыканием множества многочленов степени не выше d от конечного числа переменных в топологии сходимости по мере γ. Отметим, что $L^2(\gamma)$ является ортогональной суммой замкнутых подпространств $\mathcal{X}_d$ (соответствующее разложение иногда называют разложением в винеровский хаос).

Известно (см. [1, §5.6]), что на каждом пространстве $\mathcal{X}_d$ все $L^p(\gamma)$-нормы эквивалентны. В частности, для всяких d и $p \in [1, +\infty)$ существует такое $C(d,p) > 0$, что

$$\|f\|_p \le C(d,p)\|f\|_1 \le C(d,p)\|f\|_2, \tag{1}$$

где через $\|\cdot\|_p$ обозначается норма в $L^p(\gamma)$.

Через σ_n обозначим σ-алгебру, порожденную координатными функциями x_j с $j > n$. Пусть $\mathbb{E}(\psi|\sigma_n)$ – условное математическое ожидание γ-интегрируемой функции ψ относительно σ_n, т.е.

$$\mathbb{E}(\psi|\sigma_n)(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) = \int \psi(y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\, \gamma_1(dy_1) \cdots \gamma_1(dy_n).$$

Напомним, что σ_n-измеримые функции – это борелевские функции на X, не зависящие от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Из оценки (1) вытекают следующие известные свойства измеримых многочленов, которые мы для удобства читателя приведем с доказательством.

Лемма 1. (i) *Для каждого d найдется такое $\varepsilon(d) > 0$, что для всякой функции $f \in \mathcal{X}_d$ с нулевым средним для функции*

$$\varphi_f(t) = \int_X \exp(itf)\, d\gamma$$

при $|t| \cdot \|f\|_2 \le \varepsilon(d)$ справедлива оценка

$$1 - \operatorname{Re}\varphi_f(t) \ge \frac{1}{3} t^2 \|f\|_2^2. \tag{2}$$

(ii) *Для каждого d существует существует такое число $\alpha(d) > 1$, что для всех $f \in \mathcal{X}_d$ выполнено неравенство*

$$\gamma\Big(x\colon\ \|f\|_1/4 \le |f(x)| \le \alpha(d)\|f\|_1\Big) \ge \frac{1}{2\alpha(d)}. \tag{3}$$

Доказательство. (i) Из формулы Тейлора для функции $\operatorname{Re}\varphi_f$ в точке 0 находим

$$\varphi_f(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\|f\|_2^2 + r(t,f),$$

где $|r(t,h)| \le 6^{-1}|t|^3\|f\|_3^3$. Ввиду (1) имеем

$$\|f\|_3^3 \le C(d,3)^3 \|f\|_2^2.$$

Положим $\varepsilon(d) := C(d,3)^{-3}$. Тогда

$$\frac{t^2}{2}\|f\|_2^2 - \frac{|t|^3}{6}\|f\|_3^3 \geq \frac{t^2}{3}\|f\|_2^2$$

при $C(d,3)^3|t| \cdot \|f\|_2 \leq 1$, т.е. при $|t| \cdot \|f\|_2 \leq \varepsilon(d)$.

(ii) Представим $\|f\|_1$ в виде суммы интегралов $|f|$ по следующим трем множествам:

$$\Omega_1 := \{x\colon\ |f(x)| < \|f\|_1/4\}, \quad \Omega := \{x\colon\ \|f\|_1/4 \leq |f(x)| \leq \alpha\|f\|_1\},$$

$$\Omega_2 := \{x\colon\ |f(x)| > \alpha\|f\|_1\}.$$

Интеграл по Ω_1 не превосходит $\|f\|_1/4$. Интеграл по Ω_2 с помощью неравенства Коши–Буняковского, неравенства Чебышева и (1) оценивается следующим образом:

$$\int_{\Omega_2} |f|\, d\gamma \leq \gamma(\Omega_2)^{1/2}\|f\|_2 \leq \alpha^{-1/2}C(d,2)\|f\|_1.$$

Значит, при $\alpha^{-1/2}C(d,2) \leq 1/4$ получаем

$$\int_{\Omega} |f|\, d\gamma \geq \|f\|_1/2,$$

что дает нужную оценку, если положить $\alpha(d) := 16C(d,2)^2$. □

Теорема 1. *Пусть последовательность функций $f_n + g_n$, где $f_n \in \mathcal{X}_d$ и γ-измеримая функция g_n зависит только от переменных x_i с $i > n$, имеет равностепенно непрерывные в нуле характеристические функционалы $\varphi_{f_n+g_n}(t)$. Тогда последовательность функций $\psi_n := f_n - \mathbb{E}(f_n|\sigma_n)$ ограничена в каждом $L^p(\gamma)$.*

Доказательство. Пространство X с мерой γ представимо в виде произведения $\mathbb{R}^n$ со стандартной гауссовской мерой γ_n и еще одного экземпляра (X,γ). Точки $x \in X$ будем записывать в виде пар $x = (z,y)$, где $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in X$. Легко проверить, что функция $\mathbb{E}(f_n|\sigma_n)$ является измеримым многочленом степени d и не зависит от переменных $x_1,\ldots,x_n$. При γ-п.в. фиксированных y функция $z \mapsto f_n(z,y)$ имеет версию, являющуюся многочленом на $\mathbb{R}^n$ степени d. При таких y функция $z \mapsto \psi_n(z,y)$ есть многочлен степени d с нулевым средним относительно меры γ_n. Ввиду оценки (2) при

$$t^2 \int_{\mathbb{R}^n} \psi_n(z,y)^2\, \gamma_n(dz) \leq \varepsilon(d)^2 \tag{4}$$

имеем

$$1-\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^n}\exp[it\psi_n(z,y)]\,\gamma_n(dz)\geq\frac{1}{3}t^2\int_{\mathbb{R}^n}\psi_n(z,y)^2\,\gamma_n(dz). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что интеграл от $\psi_n(z,y)^2$ по z мере γ_n есть измеримый многочлен степени $2d$ по y. Поэтому в силу (3) справедливо неравенство

$$\gamma\Bigl(y\colon\ 4^{-1}\|\psi_n\|_2^2\leq\int_{\mathbb{R}^n}\psi_n(z,y)^2\,\gamma_n(dz)\leq\alpha(2d)\|\psi_n\|_2^2\Bigr)\geq\frac{1}{2\alpha(2d)}.$$

Множество в левой части этого неравенства обозначим через Ω_n. Пусть

$$t^2\|\psi_n\|_2^2\leq\varepsilon(d)^2/\alpha(2d). \tag{6}$$

Тогда для всякого $y\in\Omega_n$ выполнено (4), что ввиду (5) дает оценку

$$1-\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^n}\exp[it\psi_n(z,y)]\,\gamma_n(dz)\geq\frac{1}{12}t^2\|\psi_n\|_2^2.$$

Используя независимость g_n от первых n переменных и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_{f_n+g_n}(t)&=\int_X\exp(itf)\,d\gamma=\\&=\int_X\exp[itg_n(y)+it\mathbb{E}(f_n|\sigma_n)]\int_{\mathbb{R}^n}\exp[it\psi_n(z,y)]\,\gamma_n(dz)\,\gamma(dy).\end{aligned}$$

Так как

$$|\exp[itg_n(y)+it\mathbb{E}(f_n|\sigma_n)]|=1,$$

то ввиду полученных выше неравенств при условии (6) имеет место оценка

$$1-\operatorname{Re}\varphi_{f_n+g_n}(t)\geq\frac{t^2}{12}\gamma(\Omega_n)\|\psi_n\|_2^2\geq\frac{t^2\|\psi_n\|_2^2}{24\alpha(2d)}.$$

Из этой оценки равномерная ограниченность $\|\psi_n\|_2$ очевидна: в противном случае нашлись бы последовательности $t_j\to 0$ и $n_j\to\infty$, для которых

$$1-\operatorname{Re}\varphi_{f_{n_j}+g_{n_j}}(t_j)\geq(24\alpha(2d))^{-1},$$

что невозможно по условию. $\square$

Следствие 1. *Заключение доказанной теоремы верно, если последовательность функций f_n+g_n сходится по распределению.*

Следствие 2. *Пусть последовательность функций $\eta_n = f_n + g_n$, где $f_n \in \mathcal{X}_d$ и γ-измеримая функция g_n зависит только от переменных x_i с $i > n$, почти всюду имеет конечный предел η. Тогда $\eta \in \mathcal{X}_d$.*

Доказательство. Сходимость почти всюду влечет сходимость по распределению. Поэтому последовательность функций ψ_n ограничена в $L^2(\gamma)$. Можно считать, что $f_n = \psi_n$, заменив g_n на $g_n + \mathbb{E}(f_n|\sigma_n)$. Тогда $\|f_n\|_2 \le C < \infty$. Как известно, существует такая подпоследовательность $\{n_i\}$, что функции

$$F_k := (f_{n_1} + \cdots + f_{n_k})/k$$

сходятся в $L^2(\gamma)$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что функции F_k сходятся почти всюду. Функции

$$(\eta_{n_1} + \cdots + \eta_{n_k})/k$$

сходятся почти всюду к функции η. Тогда функции

$$w_k := (g_{n_1} + \cdots + g_{n_k})/k$$

также сходятся почти всюду к пределу w. Остается заметить, что w почти всюду совпадает с постоянной. Это следует из колмогоровского закона нуля и единицы (см. §10.10(iv) в [2]), ибо для всякой конечной перестановки координат π мы имеем $w(\pi(x)) = w(x)$ почти всюду. Действительно, при фиксированном m мы имеем

$$w_k = k^{-1}(g_{n_1} + \cdots + g_{n_m}) + k^{-1}(g_{n_{m+1}} + \cdots + g_{n_k}),$$

где первое слагаемое стремится к нулю при $k \to \infty$, а второе не зависит от переменных с номерами до m. Следовательно, если π не меняет координаты с номерами не менее m, то $w(\pi(x)) = w(x)$ для тех x, где $w(x) = \lim_{k\to\infty} w_k(x)$ существует. $\square$

Отметим тот очевидный факт, что условие независимости g_n от переменных $x_1, \ldots, x_n$ может быть заменено на существование модификации (т.е. почти всюду равной функции) с таким свойством.

Напомним, что функция p на $\mathbb{R}^n$ является многочленом степени d в точности тогда, когда для всяких фиксированных $a, b \in \mathbb{R}^n$ функция $t \mapsto p(a + tb)$ является многочленом степени d на прямой.

Следствие 3. *Пусть γ-измеримая функция f обладает следующим свойством: для некоторого $d \geq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ при γ-п.в. x функция*

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto f(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n + t_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \qquad (7)$$

является многочленом степени d. Тогда $f \in \mathcal{X}_d$.

Доказательство. Проведем индукцию по d. Для $d = 0$ утверждение верно по теореме 2.4.1 из [1] («закон 0–1»). Пусть теперь $d > 0$ и утверждение доказано для всех натуральных чисел, меньших d. В частности, получаем, что частная производная $\partial_{x_1} f$ функции f по x_1 (существующая ввиду условия) является измеримым многочленом степени $d-1$. Поэтому

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2, \ldots) = x_1^{d-1} u_{d-1}(x_2, x_3, \ldots) + \cdots + x_1 u_1(x_2, x_3, \ldots) + u_0(x_2, x_3, \ldots),$$

где $u_k \in \mathcal{X}_{d-1-k}$. Следовательно, получаем представление

$$f(x_1, x_2, \ldots) = x_1^d v_d(x_2, x_3, \ldots) + \cdots + x_1 v_1(x_2, x_3, \ldots) + v_0(x_2, x_3, \ldots),$$

где v_k – измеримые многочлены степени $d - k$ при $k > 0$ и измеримая функция v_0 не зависит от переменной x_1. Ясно, что v_0 удовлетворяет тем же условиям, что и f. Повторяя это рассуждение для каждого переменного $x_2, \ldots, x_n$, получим представление $f = f_n + g_n$, где $f_n \in \mathcal{X}_d$ и измеримая функция g_n не зависит первых n переменных. По предыдущему следствию имеем $f \in \mathcal{X}_d$. □

Отметим, что результат последнего следствия содержится в примере 5.8.3 из [1], но в приведенном там доказательстве имеется существенный пробел: без обоснования утверждается существование предела $f_n(x)$ почти всюду. В замечании 5.10.5 в [3] этот пробел устранен за счет дополнительного предположения, что $f \in L^2(\gamma)$, но в доказанных выше утверждениях никакой интегрируемости f не требуется. Заметим еще, что в цитированных примере и замечании из [1], [3] приведенная формулировка содержит также очевидную неточность: в условии фигурируют функции $t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + t, x_{n+1}, \ldots)$ вместо функций (7), хотя в обосновании речь идет именно о последних. Ясно, что такая формулировка некорректна: достаточно рассмотреть функцию $\sum_{n=1}^{\infty} x_1 \cdots x_n / n!$, которая не является многочленом, но входит в $L^2(\gamma)$ и по каждому переменному есть многочлен первой степени.

Замечание 1. Из доказательств очевидно, что все изложенные результаты остаются в силе для значительно более широких классов мер на $\mathbb{R}^\infty$. Мы использовали лишь неравенства (1), выражающие эквивалентность L^p-норм на пространстве измеримых многочленов фиксированной степени, а также закон $0-1$. Обоими свойствами обладают произведения конечномерных выпуклых мер (см. [4], [5]). Относительно закона $0-1$ см. §10.10(iv) в [2]. Оценки характеристических функционалов многочленов от гауссовских случайных векторов на бесконечности имеются в работах [1], [6], [7].

Замечание 2. Простым следствием доказанного является тот факт, что из сходимости измеримых многочленов f_n степени d по распределению вытекает равномерная ограниченность $\{f_n\}$ в каждом $L^p(\gamma)$. Однако остается неизвестным, совпадает ли предельное распределение с распределением какого-либо измеримого многочлена степени d. Для $d = 1$ это очевидно, а для $d = 2$ доказано в работе [8]. Из оценки (1) следует, что такие предельные распределения однозначно определяются своими моментами.

Авторы благодарны Ю.В. Прохорову за полезные обсуждения. Работа поддержана проектами РФФИ 07-01-00536, 08-01-91205-ЯФ, 08-01-90431-Укр и программой SFB 701 при университете Билефельда.

Список литературы

[1] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, Физматлит, 1997.

[2] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 2. 2-е изд. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.

[3] Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.

[4] Bobkov S.G. Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials. Lecture Notes in Math. 2000. V. 1745. P. 27–35. Springer, Berlin, 2000.

[5] Berezhnoy V.E.// Theory Stoch. Process. 2008. V. 14.

[6] Гетце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В.// УМН. 1996. Т. 51, в. 2. С. 3–26.

[7] Богачев В.И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

[8] Arcones M.A. The class of Gaussian chaos of order two is closed by taking limits in distribution. Advances in stochastic inequalities (Th.P. Hill et al. ed.). P. 13–19. AMS special session on Stochastic inequalities and their applications, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA, October 17-19, 1997. Providence, Rhode Island: AMS, American Mathematical Society. Contemp. Math. V. 234, 1999.