Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра теории функций и функционального анализа

Дипломная работа

«Положительность плотностей решений эллиптических уравнений для мер»

Выполнил студент 531 группы
Агафонцев Борис Валерьевич

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Богачев В. И.

Москва
2011

Содержание

1 Введение

Цель данной работы — получить новые оптимальные условия на функцию f, которые будут обеспечивать строгую положительность плотности вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющей эллиптическому уравнению

$$L^*\mu = 0 \tag{1}$$

с оператором $Lu = \Delta u + (\nabla u, b)$, в терминах интегрируемости функции $f(|b|)$ относительно меры μ. Указанное уравнение понимается в смысле тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} Lu(x)\mu(dx) = 0 \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где предполагается, что коэффициент b измерим по Борелю и локально интегрируем относительно μ. Поставленная задача и уравнение (1) имеют смысл и для более общего эллиптического оператора L вида

$$Lu(x) = \partial_{x_i}\big(a^{ij}(x)\partial_{x_j}u(x)\big) + b^i(x)\partial_{x_i}u(x),$$

где коэффициенты a^{ij} и b^i измеримы по Борелю и локально интегрируемы относительно μ, причем в этом выражении производится суммирование по повторяющимся индексам. Дополнительно мы будем требовать, чтобы матрица $A(x) = \big(a^{ij}(x)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ была симметрична и удовлетворяла условиям

$$a^{ij} \in W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d), \quad m|y|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a^{ij}(x)y_iy_j \leqslant M|y|^2 \tag{C1}$$

при некоторых $m, M > 0$ и $p > d$, где через $W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ обозначается класс Соболева всех функций, локально интегрируемых в степени p относительно меры Лебега и имеющих обобщенные частные производные первого порядка, также локально интегрируемые в степени p относительно меры Лебега.

Известно, что при указанных условиях мера μ задается плотностью относительно меры Лебега, т. е. имеет вид $\mu = \varrho\, dx$. Если же еще дополнительно потребовать включения $b^i \in L^p_{loc}(\mu)$ (т. е. локальную интегрируемость b^i относительно меры μ) или включения $b^i \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, то $\varrho \in W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ и потому ϱ имеет непрерывную версию. Однако мера μ может задаваться гладкой плотностью и в случае довольно сингулярного коэффициента b, не являющегося локально интегрируемым относительно меры Лебега. Например, произвольная вероятностная плотность $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ задает меру μ, удовлетворяющую уравнению (1) с коэффициентами $A(x) = I$ и $b(x) = \nabla\varrho(x)/\varrho(x)$ при $\varrho(x) > 0$, $b(x) = 0$ при $\varrho(x) = 0$. Действительно, тогда определяющее интегральное тождество превращается в соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} [\Delta u \varrho + (\nabla\varrho, \nabla u)] dx = 0,$$

которое выполняется ввиду формулы интегрирования по частям для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Сформулируем следующие условия. Пусть даны функции $f \in$ $\in C^2[0,\infty)$ и $\varphi \in C[0,\infty)$, где φ строго возрастает и отображает $[0,\infty)$ на $[0,\infty)$, удовлетворяющие следующим условиям при некоторых $t_0 > 0$, $z_0 > 0$ и $N > 0$:

$$f(t) > 0,\ f'(t) > 0, f''(t) > 0\ \forall t \geqslant t_0; \tag{H1}$$

$$(e^{-f(t)})'' \geqslant 0\ \forall\, t \geqslant t_0, \quad \lim_{t\to+\infty} e^{-f(t)} = 0; \tag{H2}$$

$$\varphi^{-1}(z) \leqslant N f'(f^{-1}(z))\ \ \forall\, z \geqslant z_0. \tag{H3}$$

Также для функции φ и коэффициента b потребуем выполнение условия

$$|b| \exp(\varphi(|b|)) \in L^r(\mu), \text{где } r > \min\{2, d\}. \qquad \text{(C2).}$$

В работе [1] (см. также задачу 6.8.4 в [3]) была получена следующая общая теорема, дающая нижние оценки для плотностей решений эллиптических уравнений (1) общего вида.

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \varrho\, dx$ *— решение уравнения* (1)*, где коэффициенты* a^{ij}*,* b^i *удовлетворяют условию* (C1) *и выполняются условия* (H1), (H2), (H3) *и* (C2)*. Тогда существуют такие числа* $c_1, c_2 > 0$*, что*

$$\varrho(x) \geqslant e^{-f(c_1|x|+c_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Разумеется, из этой оценки следует строгая положительность этой непрерывной версии. Отметим, что эта теорема верна для любого конечного d.

В работе [2] в случае $d = 1$ был получен следующий окончательный результат.

Теорема 2. *Для измеримой функции* $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *следующие условия эквивалентны*:

(A) *Пусть* $\varrho\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *абсолютно непрерывна и удовлетворяет* *условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\varrho/\varrho')\varrho(x)dx < \infty$$

и $\varrho \neq 0$. *Тогда* $\varrho(x) > 0$ *почти для всех (по мере Лебега)* $x \in \mathbb{R}$.

(C) *Пусть* ψ *— возрстающая выпуклая функция,* $\psi(c) > 0$. *Тогда для всякого* $c > 0$

$$\int\limits_{c}^{\infty} \frac{\ln \psi(x)}{x^2} dx = +\infty. \qquad (2)$$

В работе [2] также отмечено, что для всякого гомеоморфизма $h\colon [r, \infty) \to [R, \infty)$, где $r > 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_{R}^{\infty} \frac{1}{h^{-1}(s)} ds = \int\limits_{r}^{\infty} \frac{h(t)}{t^2}\, dt - \frac{R}{r},$$

т. е. либо оба интеграла бесконечны, либо оба конечны и указанное соотношение верно. Таким образом, условие (2) записывается в виде

$$\int\limits_{R}^{\infty} \frac{1}{(\ln \psi)^{-1}(t)}\, dt = +\infty,\ \ R > 0. \qquad (3)$$

Естественно возникает вопрос о связи указанных условий из работ [1] и [2]. Основной результат нашей работы состоит в том, что при одном естественном и не слишком ограничительном дополнительном условии на φ неулучшаемое условие работы [2] для одномерного случая и логарифмического градиента оказывается достаточным и для строгой положительности плотности решения общего многомерного эллиптического уравнения (1), причем даже дает нижнюю оценку решения на всем пространстве. Тем самым в классе функций φ, удовлетворяющих этому дополнительному условию, достаточное условие (C2) из [1] оказывается неулучшаемым.

2 Основной результат

Нами сформулирована и доказана следующая теорема, которая и составляет основной результат настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть вероятностная мера* $\mu = \varrho\, dx$ *на* $\mathbb{R}^d$ *удовлетворяет уравнению* (1)*, где коэффициенты* a^{ij}*,* b^i *удовлетворяют условию* (C1)*. Предположим, что возрастающая непрерывно дифференцируемая функция* $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *такова, что выполнено условие* (C2)*, причем при некотором* $\alpha > 0$ *выполнены условия*

$$\varphi'(t) > \frac{1}{t}, \quad t \in [\alpha, +\infty), \tag{4}$$

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{\varphi^{-1}(t)} = +\infty. \tag{5}$$

Определим функцию f *из условия*

$$f^{-1}(z) = \int\limits_{\alpha}^{z} \frac{dt}{\varphi^{-1}(t)}. \tag{6}$$

Тогда существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$*, что для непрерывной версии* ϱ *верна оценка*

$$\varrho(x) \geqslant e^{-f(c_1|x|+c_2)}.$$

В частности, непрерывная версия ϱ *строго положительна.*

Доказательство. Положим $g = \varphi^{-1}$. Тогда определение функции f посредством (6) приводит к следующему равенству:

$$t = \int\limits_{b}^{f(t)} \frac{dy}{g(y)}. \tag{7}$$

Из этого равенства видно, что функция f должна быть положительной, начиная с некоторого t_0 и являться неограниченно растущей при $t \to +\infty$. Отметим также, что соотношение (7) справедливо при всех $t \geqslant 0$ именно из-за условия (5), поскольку функция f должна быть определена на $[0, +\infty)$. Кроме того, определенная таким образом функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g(z) = f'(f^{-1}(z)), \tag{8}$$

что проверяется дифференцированием (6). Таким образом мы получили, что выполняется условие (H3) с константой $N = 1$.

Продифференцировав равенство (7), получаем соотношение

$$f'(t) = g(f(t)),$$

после повторного дифференцирования дающее равенство

$$f''(t) = g'(f(t))\, f'(t).$$

Заметим, что так как функция $\varphi\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ является строго возрастающей, то и обратная ей функция g также будет неотрицательной и возрастающей. Из этого мы можем заключить, что $f'(t) > 0$, $f''(t) > 0$. Итак, условие (H1) выполнено.

Теперь рассмотрим выражение

$$\big(e^{-f(t)}\big)'' = \big(-f'(t)e^{-f(t)}\big)' = \\ = -f''(t)e^{-f(t)} + \big(f'(t)\big)^2 e^{-f(t)} = \\ = e^{-f(t)}\big((f'(t))^2 - f''(t)\big).$$

Покажем, что при введенных нами ограничениях выражение $(f'(t))^2 - f''(t)$ положительно. Подставив выражения для f' и f'', полученные нами выше, и полагая $z = f(t)$, находим, что

$$(f'(t))^2 - f''(t) = g(z) \cdot (g(z) - g'(z)),$$

где при $s = \varphi^{-1}(z)$ мы имеем

$$g(z) - g'(z) = \varphi^{-1}(z) - \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(z))} = s - \frac{1}{\varphi'(s)} > 0$$

в силу условия (4). Тем самым выполнено и условие (H2).

Таким образом, были проверены все условия, которые требуются для выполнения оценки вида $\varrho(x) \geqslant e^{-f(c_1|x|+c_2)}$ в цитированной выше теореме из работы [1]. Теорема доказана. $\square$

3 Заключение

Отметим, что единственным условием этой теоремы, не имеющим аналогов в условиях работ [1] и [2], является условие (4), т. е. оценка $\varphi'(t) > 1/t$ при достаточно больших t (непрерывная дифференцируемость φ также не требуется в этих работах). Тем не менее, это условие в некотором смысле близко к выпуклости функции ψ. Аналогом функции ψ в наших условиях является функция e^{φ}. Однако выпуклости e^{φ} для получения требуемой оценки не хватает. Достаточно потребовать выпуклость функции $e^{\delta\varphi}$ для некоторого $\delta \in (0,1)$.

Для практических применений эта оценка фактически не представляет собой ограничения, поскольку основное условие (5), которое можно записать в виде

$$\int\limits_{R}^{+\infty} \frac{\varphi'(y)}{y}\,dy = +\infty,$$

выполнено для $\varphi'(y)$ порядка $(\ln y)^{-1}$, но уже нарушено для $\varphi'(y) = (\ln y)^{-1-\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$. Разумеется, формально говоря, (4) не следует из (5). Нам не удалось выяснить, можно ли снять условие (4). Это связано с тем, что это условие технического характера используется при проверке выполнения условия (H2) из работы [1]. Рассмотрение равенства $\varphi^{-1}(z) = Nf'(f^{-1}(z))$ при всех значениях N, а не только при $N = 1$, никаких преимуществ не даёт.

Полученные результаты изложены нами в работе [4]. В ней было сформулировано и следствие из основного результата данной работы, более удобное для применения в приложениях, но использованные в этом следствии замещающие условия более сильные, чем те, которые приведены в настоящей работе.

Список литературы

[1] Богачёв В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Нижние оценки плотностей решений эллиптических уравнений для мер // ДАН. — 2009. — Т. 426. — № 2. — С. 156–161.

[2] Scheutzow M., Weizsäcker H. von. Which moments of a Logarithmic Derivative Imply Quasiinvariance? // Doc. Math. — 1998. — V. 3. — P. 261–272.

[3] Богачев В. И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявена. М. — Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2008.

[4] Агафонцев Б. В., Богачев В. И., Шапошников С. В. Условие положительности плотности инвариантной меры // ДАН. — 2011. — Т. 438. — № 3.