Лекции
по математическому анализу
и общей алгебре

Борис Агафонцев, Пузыревский Иван
Москва, Лицей 1557, 2005
Дата релиза: 22 мая 2005 г.

Lectures
on calculus
and generic algebra

Boris Agafontsev, Pouzyrevsky Ivan
Moscow, Lyceum 1557, 2005
Release date: May 22-nd, 2005

Содержание

1 Предисловие (Abstract)

Что есть математика? Прежде всего, это умение логически мыслить. Рене Декарт сказал: “Cogito, ergo sum”[1]. Следовательно нельзя существовать без математики, как нельзя существовать без пищи и без воздуха.

Хотелось бы выразить благодарности всем, без кого не был бы напечатан этот курс лекций. Прежде всего, это Кожухов Игорь Борисович, который и есть автор этого курса, весь педагогический коллектив Лицея №1557, которые не слишком загружали домашними заданиями, оставляя время на занятия математикой. Хотелось бы поблагодарить ещё многих и многих людей, без которых текущее мгновение не было таким, как оно есть. Это античные философы и современные физики, самые близкие каждому из нас люди и совершенно посторонние, работающие на благо Цивилизации.

Обучение есть постоянное совершенствование самого себя. Всего знать невозможно, ну что ж, приступим к тому, что в наших силах.

B.

Весь мир линеен. Абсолютно линеен, хотите вы того или нет; верите или нет. Для кого-то математика — это способ самовыражения, а для кого-то — вся жизнь. Главное в этом деле, как и везде, не перестараться.

Этот текст вы бы сейчас не читали, если бы не многие люди. Во-первых, конечно же, спасибо родителям за все. Во-вторых, всем преподавателям, у которых я занимался, за то, что потратили свое время на меня. В-третьих, всем друзьям и знакомым, которые мне помогали. Вообще, очень многие люди так или иначе повлияли на появление данного курса лекции. *Merci* .

На самом деле rationale появления данного собрания достаточно смутно, так как началась все (как обычно) с простого интереса к TEX-у, из-за которого, вероятно, многим людям оказалось проще готовиться к экзамену. Надеюсь, что и этот курс кому-нибудь поможет.

S.

Gaudeaumus igitur! [2]

[1]Я мыслю, следовательно существую. (лат.)
[2]Будем же веселиться! (лат.)

2 Пределы числовых последовательностей

The truth that makes men free is for the most part
the truth which men prefer not to hear.[3]

Herbert Agar

2.1 Определение числовой последовательности. Ограниченность.

Определение. *Числовая последовательность* — это отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Последовательность (a_n) называется возрастающей	$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\colon a_n < a_{n+1}$
Последовательность (a_n) называется убывающей	$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\colon a_n > a_{n+1}$
Последовательность (a_n) называется невозрастающей	$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\colon a_n \le a_{n+1}$
Последовательность (a_n) называется неубывающей	$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\colon a_n \ge a_{n+1}$
Последовательность (a_n) называется ограниченной сверху	$\Leftrightarrow \exists\, M\, \forall\, n\colon a_n \le M$
Последовательность (a_n) называется ограниченной снизу	$\Leftrightarrow \exists\, M\, \forall\, n\colon a_n \ge M$
Последовательность (a_n) называется ограниченной	$\Leftrightarrow \exists\, M_1, M_2\, \forall\, n\colon M_1 \le a_n \le M_2$

Теорема 2.1.1. *Последовательность (a_n) ограниченная, тогда и только тогда, когда:*

$$\exists\, M\, \forall\, n\colon |a_n| \le M$$

Доказательство ($\Rightarrow$).

$$|a_n| \le M \Leftrightarrow -M \le a_n \le M$$

Последовательность ограниченная по определению. □

Доказательство ($\Leftarrow$). Последовательность (a_n) — ограниченная, значит:

$$\exists\, M_1, M_2\, \forall\, n\; M_1 \le a_n \le M_2.$$

Пусть

$$M = \max(|M_1|, |M_2|),\ M \ge 0$$

Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} M \ge |M_1| \\ M \ge |M_2| \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_n & \le & M_2 & \le & |M_2| & \le & M \\ -a_n & \le & -M_1 & \le & |M_1| & \le & M \end{array}\right. \Rightarrow |a_n| \le M$$

□

Определение. *Окрестность точки A (ε-окрестность)* — $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$

Определение. *Пределом числовой последовательности (a_n)* называется такое число a, удовлетворяющее условию:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n \ge N\colon |a_n - a| < \varepsilon$$

То есть для доказательства, что число a является пределом последовательность (a_n) необходимо указать функцию $N(\varepsilon)$, возвращающую натуральное число N, для которого справедливо, что для $\forall\, n \ge N\colon |a_n - a| < \varepsilon$ при заданном ε

Пример. *Для последовательности, n-ный член которой:*

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1$$

[3]Правда, которая делает людей свободными, главным образом правда, которую люди предпочитают не слышать. (англ.)

2.2 Свойства пределов числовых последовательностей

Теорема 2.2.1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть предел последовательности (a_n) равен a. Тогда:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon)\, \forall\, n \geq N\colon\, -\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon$$

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$$

Пусть:

$$M_1 = \min\big(\min(a_1, \cdots, a_{n-1}), a\big)$$

$$M_2 = \max\big(\max(a_1, \cdots, a_{n-1}), a\big)$$

Тогда:

$$\forall\, n\colon M_1 \leq a_n \leq M_2$$

□

Теорема 2.2.2. *Если существует предел последовательности (a_n) равный a, то ог едиественен.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть существуют два предела:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n &= a \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n &= b \end{cases}$$

Тогда:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_1\, \forall\, n \geq N_1\colon |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_2\, \forall\, n \geq N_2\colon |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем такое M, что $M = \max(N_1, N_2)$ Тогда

$$|a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| + |a_n - b| \geq |a - b|$$

$$|a - b| < \varepsilon$$

Противоречие с тем, что ε — любое □

2.3 Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой* , если ее предел равен нулю.

Теорема 2.3.1.

$$\sum_{i}^{k} \alpha_{i_n} = \beta_n$$

Где α_{i_n}, β_n — бесконечно малые последовательности.

Доказательство.

$$\alpha_{i_n}\colon \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_i(\varepsilon)\, \forall\, n \geq N_i\colon |a_{i_n}| < \frac{\varepsilon}{k}$$

$$\exists\, N = \max(N_i)$$

Тогда:

$$|\alpha_{1_n} + \alpha_{2_n} + \cdots + \alpha_{k_n}| \leq |\alpha_{1_n}| + |\alpha_{2_n}| + \cdots + |\alpha_{k_n}| < \varepsilon$$

Значит, β_n — бесконечно малая. □

Теорема 2.3.2.
$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n b_n| = 0$$
Где α_n — бесконечно малая, а b_n — ограниченная последовательность.

Доказательство.
$$|\alpha_n b_n| = |\alpha_n| \times |b_n| < \varepsilon \times M$$
□

Теорема 2.3.3. *Произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Воспользуемся теоремами (2.2.1) и (2.3.2) (одну из бесконечно малых последовательностей можно рассматривать как ограниченную). □

Утверждение.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$$
Где α_n — бесконечно малая.

2.4 Бесконечно большие последовательности

Определение. *Бесконечно большой* последовательностью (a_n) называется такая последовательность, которая удволетворяет следующим условиям:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall\, M > 0\, \exists\, N(M)\, \forall\, n \geq N\colon |a_n| > M$$

Пример.
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \times n = \infty, \quad (N(M) = [M] + 1)$$

Определение.
$$\begin{array}{rcrcllcr} \lim\limits_{n\to\infty} a_n & = & +\infty & \Leftrightarrow & \forall\, M > 0\, \exists\, N(M)\, \forall\, n \geq N\colon & a_n & > & M \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n & = & -\infty & \Leftrightarrow & \forall\, M > 0\, \exists\, N(M)\, \forall\, n \geq N\colon & a_n & < & -M \end{array}$$

2.5 Теоремы о сумме, произведении и частном пределов

Пусть:
$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \exists \lim_{n\to\infty} b_n = b$$
Тогда:
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_1\, \forall\, n \geq N_1\colon |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_2\, \forall\, n \geq N_2\colon |b_n - b| < \varepsilon$$
$$a_n = a + \alpha_n$$
$$b_n = b + \beta_n$$

Теорема 2.5.1.
$$\exists \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Доказательство.
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, M = \max(N_1, N_2)\, \forall\, n \geq M\colon \big|(a_n + b_n) - (a + b)\big| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$
□

Теорема 2.5.2.
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n - ab| \leq \\ &\leq |b\alpha_n| + |a\beta_n| + |\alpha_n \beta_n| < \varepsilon\big(\underbrace{|a| + |b|}_{const} + \varepsilon\big)\end{aligned}$$

□

Теорема 2.5.3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Доказательство.

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2\,|\alpha_n b - a\beta_n|}{b^2} \leq \frac{2}{b^2}\big(|\alpha_n b| + |a\beta_n|\big) < \frac{2\varepsilon}{b^2}\big(\underbrace{|a| + |b|}_{const}\big)$$

□

3 Пределы функций

Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater.[4]

Albert Einstein

3.1 Пределы функций в точке

Пусть $f(x)$ — функция, определённая в проколотой окрестности точки a:

$$\begin{aligned} U(a) &= (a-\eta; a+\eta) \\ \dot{U}(a) &= U(a) \setminus \{a\} \end{aligned}$$

Определение. *Пределом функции $f(x)$ в точке a* называется такое число A, для которого при неограниченном приближении значения аргумента к a, значение функции неограниченно приближается к A.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, U(A)\; \exists\, \dot{U}(a)\colon f\left(\dot{U}(a)\right) \subseteq U(A)$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x\colon 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Пример. *Для функции* $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9,\ \delta(\varepsilon) = \min\bigl(\sqrt{\varepsilon+9} - 3; \sqrt{9-\varepsilon} - 3\bigr)$

Когда x стремится к точке справа (слева), вводится понятие ”предел справа” (”предел слева”). Это делается тогда, когда $f(x)$ определена не во всей U_ε. (например для функции $\sqrt{x}$).

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x\colon a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x\colon a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

3.2 Пределы функций на бесконечности

Определение.

$$\begin{array}{llll} \lim\limits_{x\to+\infty} & f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \Delta > 0 & \forall\, x\colon \quad x > \Delta & \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to-\infty} & f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \Delta & \forall\, x\colon \quad x < \Delta & \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to\infty} & f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \Delta > 0 & \forall\, x\colon \quad |x| > \Delta & \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \end{array}$$

3.3 Бесконечные пределы

Выражение $\lim f(x) = \infty$ означает, что предел функции не существует и функция безгранично возрастает (убывает). Но условно можно считать, что в таком случае предел равен бесконечности.

Рассмотрим один из возможных случаев.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x\colon a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > M$$

Аналогично рассматриваются и другие случаи. Например:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M\; \exists\, \Delta\; \forall\, x\colon |x| > \Delta \Rightarrow f(x) < M$$

[4]Не беспокойтесь насчет ваших проблем в математике. Я могу вас заверить, что мои до сих пор больше. (англ.)

3.4 Теоремы о сумме, произведении и частном пределов

Пусть:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = y_1,\ \exists \lim_{x\to a} g(x) = y_2$$

Тогда:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_1 > 0\, \forall\, x\colon 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - y_1| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_2 > 0\, \forall\, x\colon 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - y_2| < \varepsilon$$

$$\exists\, \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

Теорема 3.4.1.

$$\exists \lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = y_1 + y_2$$

Доказательство.

$$\big|f(x) + g(x) - (y_1 + y_2)\big| \le \big|f(x) - y_1\big| + \big|g(x) - y_2\big| < 2\varepsilon$$

□

Теорема 3.4.2.

$$\exists \lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = y_1 y_2$$

Доказательство.

$$\big|f(x)g(x) - y_1y_2\big| = \big|f(x)g(x) - y_1y_2 + y_2f(x) - y_2f(x)\big| =$$

$$= \Big|f(x)\big(g(x) - y_2\big) + y_2\big(f(x) - y_1\big)\Big| < \varepsilon|f(x)| + \varepsilon|y_2| \le \varepsilon\big(\varepsilon + |y_1|\big) + \varepsilon|y_2| <$$

$$< \varepsilon\big(1 + |y_1| + |y_2|\big) = \varepsilon'$$

□

Теорема 3.4.3.

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2},\ y_2 \ne 0$$

Доказательство.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{y_1}{y_2}\right| = \left|\frac{f(x)\times y_2 - g(x)\times y_1}{g(x)\times y_2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\big(f(x)\times y_2 - y_1y_2\big) - \big(g(x)\times y_1 - y_1y_2\big)}{g(x)\times y_2}\right| < \frac{\varepsilon\big(|y_1| + |y_2|\big)}{(\varepsilon + y_2)|y_2|} < \varepsilon\frac{|y_1| + |y_2|}{y_2^2} = \varepsilon'$$

□

4 Непрерывность функций

Unless you believe, you won't understand.[5]

Saint Augustine

4.1 Определение непрерывности функции

Пусть функция $f(x)$ определёна в окрестности точки x_0.

Определение. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0* , если:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon$$

Пример. *$f(x) = \sin x$ непрерывна в любой точке x_0 числовой прямой.*

Доказательство.

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| < \varepsilon \;\Leftarrow\; \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} |x - x_0| < \varepsilon$$

□

4.2 Теоремы о сумме, произведении и частном непрерывных функций

Теорема 4.2.1. *Если $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то $F(x) = f(x) + g(x)$, $G(x) = f(x)g(x)$, $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся соответствующими теоремами в пункте 3.4. □

4.3 Непрерывность сложной функции

Теорема 4.3.1. *Если $g(x)$ непрерывна в точке x_0, $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то $F(x) = f\big(g(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство.

$$\forall\, \varepsilon_1 > 0\, \exists\, \delta_1 > 0\, \forall\, x \colon (|x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow \big(|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_1\big)$$

$$\forall\, \varepsilon_2 > 0\, \exists\, \delta_2 > 0\, \forall\, x \colon (|y - y_0| < \delta_2) \Rightarrow \big(|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon_2\big)$$

Берём $\varepsilon_1 = \delta_2$, подбираем по этим значениям δ_1.

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \big|g(x) - g(x_0)\big| < \delta_2 \Leftrightarrow \big|f(y) - f(y_0)\big| = \Big|f\big(g(x)\big) = f\big(g(x_0)\big)\Big| < \varepsilon_2$$

□

[5] Пока вы не поверите, вы не поймете. (англ.)

4.4 Непрерывность обратной функции

Теорема 4.4.1. *Если f непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a;b]$, то f^{-1} также непрерывна на отрезке $[a;b]$ ($[b;a]$).*

Доказательство. Если функция f строго монотонна на отрезке $[a;b]$, то $\exists\, f^{-1}$, определённая на отрезке $[a;b]$. Будем считать, что f строго возрастает на этом отрезке. Если $g = f^{-1}$ непрерывна, то:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, y\colon (|y - y_0 < \delta|) \Rightarrow (|g(y) - g(y_0) < \varepsilon|)$$

Пусть $f(x_0 - \varepsilon) = y_1$, $f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Тогда $y_1 < y < y_2 \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon$. Пусть $\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$. Из этого следует, что

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow y_1 < y < y_2 \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon \Rightarrow \big|g(y) - x_0\big| = \big|g(y) - g(y_0)\big| < \varepsilon$$

□

4.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве A, если она непрерывна в каждой точке множества A

Теорема 4.5.1 (Вейрштрасс-1)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.* $|f(x)| \le C$, $\forall\, \varepsilon \in [a;b]$

Доказательство. Пусть $f(x)$ неограничена. Возьмем отрезок $\Delta_1 = [a;b]$. Делим отрезок пополам. Тогда $f(x)$ неограничена на одной из половин. Обозначим ее за Δ_2. Возьмем половину отрезка Δ_2, на которой функция неограничена и обозначим за Δ_3, и так далее. Получим последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$. Тогда $\forall\, i\, \exists\, \xi \in \Delta_i$. Пусть

$$\Delta_i = [a_i; b_i], \quad a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le \xi, \quad b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \dots \ge \xi$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \exists \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

Докажем теперь, что $\alpha = \beta = \xi$. $0 \le \xi - \alpha \le \beta - \alpha$. Если $\xi \ne \alpha$, то $\forall\, n\colon b_n - a_n \ge \xi - \alpha$. Причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$, для $n > 2$. Отсюда следует, что $b_n - a_n \to 0$. Но $b_n - a_n \ge \xi - \alpha$. Противоречие. Значит, $\xi = \alpha$. Аналогично, $\xi = \beta$. Тогда $f(a_n) \to f(\xi)$, так как $f(x)$ — непрерывная функция. Распишем, что значит "f непрерывна в точке ξ":

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, U_\delta(\xi)\colon\ |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \text{ при } x \in U_\delta(\xi)$$

Поэтому можно сказать, что $f(x) \to f(\xi)$ при $x \to \xi$. Также, так как $a_n \to \xi$ и $b_n \to \xi$, то $\exists\, [a_k; b_k] \subset U_\delta(\xi) \Rightarrow \Delta_k \subset U_\delta(\xi)$. Тогда $f(\xi - \varepsilon) \le f(x) \le f(\xi + \varepsilon)$. Тогда $f(x)$ ограничена на $U_\delta(\xi)$. Тогда $f(x)$ ограничена на Δ_k. Противоречие. □

Теорема 4.5.2 (Вейрштрасс-2)**.** *Функция, непрерывная на отрезке, имеет максимум и минимум.*

$$\exists\, x_1\colon f(x_1) \ge f(x)\, \forall\, x \in [a;b],\ x \ne x_1$$

$$\exists\, x_2\colon f(x_2) \le f(x)\, \forall\, x \in [a;b],\ x \ne x_2$$

Доказательство. Из первой теоремы Вейрштрасса следует, что существуют супремум и инфинум этой функции на отрезке $[a;b]$:

$$\exists \sup_{[a;b]} f(x) = m, \quad \exists \inf_{[a;b]} f(x) = n$$

Докажем теперь, что функция достигает и супремума, и инфинума. Пусть $f(x) \ne m$, $\forall\, x \in [a;b]$. Тогда:

$$f(x) < m,\ \forall\, x \in [a;b]$$

$$m - f(x) > 0,\ \forall\, x \in [a;b]$$

$$\exists\, g(x)=\frac{1}{m-f(x)},\ [a;b]\subset D_g,\ g \text{ непрерывна на } [a;b]$$

$$\Rightarrow \forall\, x\in[a;b]\colon g(x)\le c \text{ (по первой теореме Вейрштрасса, 4.5.1)}$$

$$m-f(x)\ge\frac{1}{c}$$

$$f(x)\le\underbrace{m-\frac{1}{c}}_{const}$$

Значит, m — не супремум функции. Аналогичное доказательство для инфинума. □

Теорема 4.5.3 (Коши; о промежуточном значении функции)**.** *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и если $f(x_1)=\alpha$, $f(x_2)=\beta$, то $\forall\,\gamma\colon \alpha\le\gamma\le\beta\ \exists\,\xi\colon f(\xi)=\gamma$.*

Доказательство. Можно считать, что $f(a)=\alpha$ и $f(b)=\beta$, $\alpha\le\gamma\le\beta$ (заменяя $[a;b]$ на $[x_1;x_2]$ или $[x_2;x_1]$). Возьмем функцию $g(x)=f(x)-\gamma$. $g(a)<0$, $g(b)>0$. Надо доказать, что $\exists\,\xi\colon g(\xi)=0$. Построим последовательность вложенных отрезков.

$$\Delta_1=[a_1;b_1],\ a_1=a,\ b_1=b,\ g(a_1)<0,\ g(b_1)>0$$

$$\Delta_1\supset\Delta_2\supset\Delta_3\supset\cdots\supset\Delta_k,\ \Delta_k=[a_k;b_k],\ g(a_k)<0,\ g(b_k)>0$$

По принципу вложенных отрезков:

$$\exists\,\xi\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\Delta_k$$

Причем $a_n\to\xi$, $b_n\to\xi$. Надо доказать, что $g(\xi)=0$. Пусть $g(\xi)>0$. Тогда в δ-окрестности точки ξ: $|g(x)-g(\xi)|<\varepsilon$, при $|x-\xi|<\delta$. Возьмем $\varepsilon<\frac{1}{2}g(\xi)$. Тогда:

$$\underbrace{g(\xi)-\varepsilon}_{>0}\le g(x)\le\underbrace{g(\xi)+\varepsilon}_{>0},\ \forall\,x\in U_\delta(\xi)$$

Но $a_n\to\xi\Rightarrow\exists\,k\colon a_k\in U_\delta(\xi)$. Следовательно, $g(a_n)<0$. Но $g(a_n)>0$ по предположению, что для $\varepsilon<\frac{1}{2}g(\xi)$, $g(\xi)-\varepsilon>0$. Получили противоречие, а значит $g(\xi)$ не может быть больше нуля. Аналогично доказывается, что $g(\xi)$ не может быть меньше нуля. Таким образом, получаем, что $g(\xi)=0$. Теорема доказана. □

4.6 Теорема о непрерывности элементарных функций

Определение. Функция, получающаяся из функций $const$, a^x, $\sin x$ с помощью четырёх арифметических действий, их суперпозиций и обратных функций, называется *элементарной функцией.*

Замечание. $x^a=e^{a\ln x}$, $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ *и т. п.*

Теорема 4.6.1 (Супер-теорема)**.** *Любая элементарная функция непрерывна в любой точке своего определения*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы необходимо проверить следующие утвереждения:

1. Проверить непрерывность простейших функций.
2. Проверить непрерывность функций, образующихся в результате арифметических действий.
3. Проверить непрерывность сложной функции.
4. Проверить непрерывность обратной функции.

□

4.7 Асимптоты

Определение. *Вертикальной асимтотой* $x = a$ для функции $f(x)$ называется тогда и только тогда, когда:

$$x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Определение. *Наклонной асимптотой* $y = kx + b$ для функции $f(x)$ называется тогда и только тогда, когда:

$$y = kx + b \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

Теорема 4.7.1. *Наклонная асимптота существует тогда и только тогда, если:*

$$\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \exists \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ **(Необходимость)** Дано, что существует асимптота. Значит существует следующий предел по определению:

$$\exists \lim_{x \to \infty} \big[f(x) - (kx + b)\big] = 0$$

Из него следуют следующие соотношения:

1. $$\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} \Rightarrow k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

2. $$f(x) = kx + b + \alpha(x) \Rightarrow b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

$\Leftarrow$ **(Достаточность)** Дано, что существуют пределы k и b. Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{x \to \infty} \big[f(x) - (kx + b)\big] = \lim_{x \to \infty} \big[(f(x) - kx) - b\big] = \lim_{x \to \infty} \big[b - b\big] = 0$$

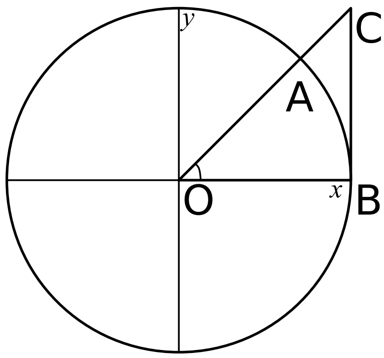
$\square$

5 Замечательные пределы

In mathematics you don't understand things.
You just get used to them.[6]

Johann von Neumann

5.1 Первый замечательный предел



Теорема 5.1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Построим тригонометрическую окружность единичного радиуса. Пусть её центр - точка O. Точка B имеет координаты $(1;0)$, точка A имеет координаты $(\cos x;\sin x)$. Точка C лежит на пересечении прямой OA и прямой, параллельной Oy и проходящей через точку B.

$$BC = \operatorname{tg} x$$

Из рисунка видно, что площадь кругового сегмента AOC меньше площади треугольника AOC, которая, в свою очередь, меньше площади треугольника BOC.

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Пусть $x > 0$ (для $x < 0$ абсолютно аналогично). Тогда:

$$\underbrace{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}_{\text{чётные функции}}$$

Если:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

То:

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\colon \forall\,x\;|x| < \delta \Rightarrow |\frac{\sin x}{x} - 1| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \varepsilon,\;\Rightarrow \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$$

□

Утверждение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Утверждение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

Утверждение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

[6] В математике вы не понимаете вещей. Вы только к ним привыкаете. (англ.)

5.2 Второй замечательный предел. Число e

Определение.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828$$

Теорема 5.2.1.

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}$$

Доказательство. Докажем, что $x(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!}$$

Члены x_n меньше соответствующих членов x_{n+1}, к тому же в x_{n+1} имееется на один член больше. Из этого следует, что $x_n < x_{n+1}$. То есть $x(n)$ — возрастающая.

С другой стороны:

$$x_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \le 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

Из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ существует. □

Утверждение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Теорема 5.2.2.

$$\exists \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Доказательство.

$$n = [x]$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon$$

С другой стороны:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{x}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n > e-\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

□

Теорема 5.2.3.

$$\exists \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Доказательство. Пусть $x=-t$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=e$$

□

Теорема 5.2.4. *Число e иррационально.*

Доказательство. Распишем число e по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. 6.13):

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}\ \xi\in(0;1)$$

Пусть $e=\frac{m}{n}$. Тогда домножим предыдущую формулу на $n!$ и получим

$$m(n-1)!=\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}n!+\frac{e^\xi}{n+1}\right)$$

Получили противоречие, так как в левой части стоит натуральное число, а правая часть состоит из двух слагаемых, одно из которых натуральное, а другое — дробное: $0<\frac{e^\xi}{n+1}<1$. □

6 Производная функции

Proff is the idol before whom the pure mathematician tortues himself.[7]

Sir Arthur Eddington

6.1 Определение производной функции

Пусть функция $f(x)$ определёна в окрестности точки x_0.

Определение. *Производной функции $f(x)$ в точке x_0* , называется:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Пример. $f(x) = 5x + 17$. *Найти* $f'(x)$.

Доказательство.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{5x+5\Delta x+17-5x-17}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 5 = 5$$

□

6.2 Связь дифференцируемости с непрерывностью

Теорема 6.2.1. *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой же точке.*

Доказательство. Пусть $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a$.

$$a = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \to a \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} - a = \alpha(\Delta x) \text{ (где } \Delta x \text{ — бесконечно малая)}$$

$$(\alpha(\Delta x))(\Delta x) = \Delta f - a\Delta x \Rightarrow \Delta f = (\alpha(\Delta x))(\Delta x) + a\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} [(\alpha(\Delta x))(\Delta x) + a\Delta x] = 0$$

□

6.3 Теоремы о сумме, произведении и частном производных функций

Теорема 6.3.1. *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\exists\, (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

Доказательство.

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

□

Теорема 6.3.2. *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\exists\, (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

[7] Доказательство — это идол, перед которым истинный математик пытает себя. (англ.)

Доказательство. Рассмотрим приращение функции (fg):

$$\Delta(fg) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) =$$
$$= (f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g) - f(x)g(x) =$$
$$= \Delta f \Delta g + (\Delta f)g(x) + (\Delta g)f(x)$$

Теперь найдем производную (fg) в точке $x = x_0$:

$$(fg)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\Delta g + (\Delta f)g(x) + (\Delta g)f(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta g}{\Delta x}\Delta x\right] + f'g + fg' = \lim_{\Delta x\to 0}[f'g'\Delta x] + f'g + fg' = f'g + fg'$$

□

Теорема 6.3.3. *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 $(g(x_0)\neq 0)$, то* $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $\frac{f}{g}$:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f}{g}(x+\Delta x) - \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)\Delta g + g^2(x)}$$

Теперь найдем производную $\left(\frac{f}{g}\right)$ в точке $x = x_0$:

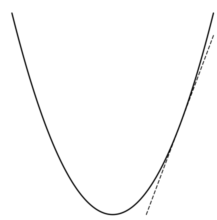
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{\Delta x\big(g(g+\Delta g)\big)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'g - fg'}{g(g+\Delta g)} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Последний переход обусловлен непрерывностью функции $g(x)$ (см. 6.2) □

6.4 Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.

Определение. *Касательной* к данной кривой в точке A называется предельное положение секущей AA_1, где $A_1 \to A$.

Коэффициент наклона секущей: $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Соответственно, при $x \to x_0$, $k = f'(x_0)$. Значит, коэффициент наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке.



Выведем уравнение касательной:

$$y - y_0 = k(x-x_0) \Rightarrow y = y_0 + k(x-x_0)$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Определение. *Углом между кривыми* называется угол между касательными в точке пересечения кривых.

6.5 Производные основных функций

$f(x)$	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Производная x^n.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \mathbf{C}_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1} + \mathbf{C}_n^2 x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

□

Производная $\frac{1}{x}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

□

Производная $\sin x$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{\Delta x}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x}_{=1}+\cos x\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}_{=1}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x}{\Delta x} = \cos x$$

□

Производная $\cos x$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x}{\Delta x}\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x}_{=1}-\sin x\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}_{=1}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x}{\Delta x} = -\sin x$$

□

Производная $\operatorname{tg} x$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

□

Производная $\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

□

6.6 Производная сложной функции

Теорема 6.6.1. *Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x)$ дифференцируема в точке $g(x_0)$, то функция $F = f(g(x))$ также диффиренцируема в точке x_0, и $F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'\big(x\big)$.*

Доказательство. Пусть $y_0 = g(x_0)$, $f'(y_0) = A$, $g'(x_0) = B$. Тогда по определению:

$$\frac{\Delta f}{\Delta y} = A+\alpha(\Delta y),\ \frac{\Delta g}{\Delta x} = B+\beta(\Delta x),$$

(где $\alpha(\Delta y)$, $\beta(\Delta x)$ — бесконечно малые при $\Delta y\to 0$, $\Delta x\to 0$ соответственно).

Тогда:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{f\big(g(x_0+\Delta x)\big)-f\big(g(x_0)\big)}{\Delta x} = \frac{f(y_0+\Delta y)-f(y_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta F = f(y_0+\Delta y)-f(y_0)$$

Здесь $y_0 = g(x_0)$, $\Delta y = \Delta g$. Тогда из равенств выше получаем:

$$\Delta F = \big(A+\alpha(\Delta y)\big)\Delta y = \big(A+\alpha(\Delta y)\big)\big(B+\beta(\Delta x)\big)\Delta x$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = AB+A\beta(\Delta x)+B\alpha(\Delta y)+\alpha(\Delta y)\beta(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = AB = f'\big(g(x)\big)g\big(x\big)$$

В силу дифференцируемости функций f и g, они непрерывны, а значит $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$. □

6.7 Производная обратной функции

Теорема 6.7.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) \neq 0$, $f(x_0)$ монотонна в окрестности точки x_0, тогда функция $g = f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказательство.

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{(y_0 + \Delta y) - (y_0)} = \frac{(x_0 + \Delta x) - (x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Переход $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$ осуществляется следующим образом:

$$g(y_0 + \Delta y) = g\Big(f\big(g(y_0 + \Delta y)\big)\Big) = g\Big(y_0 + \Delta y\Big) =$$

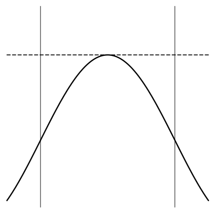
$$= g\Big(f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\Big) = g\Big(f(x_0 + \Delta x)\Big) = x_0 + \Delta x$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

6.8 Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши



Теорема 6.8.1 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда:*

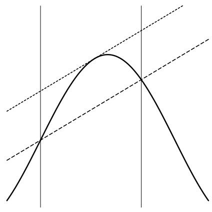
$$\exists\, \xi \in (a; b) \colon f'(\xi) = 0$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то у нее есть наибольшее и наименьшее значение на данном отрезке (См. 4.5.2). То есть:

$$\exists\, \zeta_1 \colon f(\zeta_1) \geq f(x)\, \forall\, x \in [a; b],\ x \neq \zeta_1$$

$$\exists\, \zeta_2 \colon f(\zeta_2) \leq f(x)\, \forall\, x \in [a; b],\ x \neq \zeta_2$$

Если $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$, то $f(x) = const$, а значит $f'(x) = 0\, \forall\, x \in [a; b]$. Если $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$, то тогда либо $\zeta_1 \in [a; b]$, либо $\zeta_2 \in [a; b]$. Значит, это внутренняя точка экстремума и производная в ней, по теореме Ферма, равна нулю. □



Теорема 6.8.2 (Лагранжа; о конечных приращениях). *Пусть функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда:*

$$\exists\, \xi \in (a; b) \colon f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство. Введем функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, такую, что $F(a) = F(b)$. Найдем λ:

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

По теореме Ролля (6.8.1):

$$\exists\, \xi \in (a; b) \colon F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Теорема 6.8.3 (Коши)**.** *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, а $g(x)$ — строго монотонна. Тогда:*

$$\exists\,\xi \in (a;b)\colon \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Доказательство. Введем функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, такую, что $F(a) = F(b)$. Найдем λ:

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - f(b) = \lambda\big(g(a) - g(b)\big)$$

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

По теореме Ролля (6.8.1):

$$\exists\,\xi \in (a;b)\colon F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda g'(\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

6.9 Экстремум функции. Необходимое условие экстремума

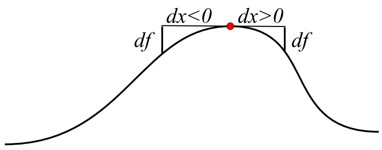
Определение. *Экстремумом* функции называется ее максимум или минимум.

Определение. x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если:

$$\exists\, U_\delta(x_0)\colon \forall\, x \in U_\delta(x_0)\ f(x_0) > f(x),\ x \neq x_0$$

x_0 называется *точкой глобального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если:

$$\forall\, x \in D_f\ f(x_0) > f(x),\ x \neq x_0$$



Теорема 6.9.1 (Ферма; необходимое условие экстремума)**.** *Если x_0 — точка экстремума и $\exists\, f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Доказательство проведем для максимума. Для минимума доказательство аналогичное. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в окрестности точки x_0.

1. Пусть $\Delta x > 0$, тогда $\Delta y < 0$. Значит:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$$

2. Пусть $\Delta x > 0$, тогда $\Delta y < 0$ (тоже). Значит:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

Из данный соотношений получаем:

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f \Delta x}_{\leq 0 \wedge \geq 0} = 0$$

□

Замечание. *Если понимать экстремум в нестрогом смысле, то утверждение сохраняется.*

Замечание. *Из того, что x_0 — точка экстремума следует, что $f'(x_0) = 0$. Но из того, что $f'(x_0) = 0$ не следует, что x_0 — точка экстремума. Простейший пример — $f(x) = x^3$. При $x = 0$ прозводная равна нулю, однако эта точка не является экстремумом.*

Определение. Точка, в которой производная не существует или равна нулю, называется *критической* .

6.10 Связь производной с монотонностью функции. Достаточное условие экстремума

Теорема 6.10.1. *Если $f(x)$ строго возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$ и дифференцируема на нем, то $f'(x) \geq 0 \; \forall \, x \in (a;b)$ $(f'(x) \leq 0)$.*

Доказательство.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Проведем доказательство для строго возрастающей функции, так как доказательство для строго убывающей функции аналогично.

- Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$ (так как функция возрастает), а значит $f'(x) > 0$ (из определения; см. выше).
- Если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) < f(x)$, а значит $f'(x) < 0$.

□

Теорема 6.10.2. *Если функция $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall \, x \in (a;b)$, то $f(x)$ строго возрастает (убывает) на $(a;b)$.*

Доказательство. Проведем доказательство для $f'(x) > 0$, так как доказательство для $f'(x) < 0$ аналогично. Иными словами нужно доказать импликацию: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Возьмем произвольные точки x_1, x_2 на данном отрезке так, что $x_1 > x_2$. Тогда по теореме Лагранжа (6.8.2):

$$\exists \, \xi \in (a;b) \colon f'(\xi)(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$

Рассмотрим это равенство. $f'(\xi) > 0$ по условию ($\xi \in (a;b)$), $x_1 > x_2$ по предположению. Значит, левая часть положительна. Так как равенство верно, то и правая часть положительна, а значит $f(x_1) > f(x_2)$. □

Утверждение (Достаточное условие экстремума)**.** *Если в некоторой точке x_0 производная равна нулю, а при прохождении через эту точку знак производной меняется, то x_0 — точка экстремума.*

6.11 Правило Лопиталя

Теорема 6.11.1 (*I*)**.** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в $\dot{U}_\delta(a)$ и непрерывна в $U_\delta(a)$, а при $x \to a$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ образует неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то если существует предел отношения их производных, то существует и предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:*

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Так как при $x \to a$ функции $f(x)$, $g(x)$ стремятся к 0 и они непрерывны в окрестности точки a, то можно считать, что функции в точке a принимают значение 0. Тогда по теореме Коши (6.8.3):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(где ξ между a и x). Тогда:

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \; \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Теорема 6.11.2 (II)**.** *Если функция $f(x)$ дифференцируема для достаточно больших x, а при $x \to \infty$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ образует неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то если существует предел отношения производных при $x \to \infty$, то существует и предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:*

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим следующий предел для $y = \frac{1}{x}$ (тогда $y \to 0$; преобразования по правилу Лопиталя-I):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)'}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)'} = \lim_{y\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Теорема 6.11.3 (III)**.** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в $\dot{U}_\delta(a)$, а при $x \to a$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ образует неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то если существует предел отношения их производных, то существует и предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:*

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha\right| < \varepsilon,\ \forall\, 0 < |x-a| < \delta$$

Зафиксируем числа ε, δ и x_0, для которого подобраны параметри. Тогда рассмотрим отношение функций:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{g(x) - g(x_0) + g(x_0)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}} = \frac{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}$$

Точка ξ по теореме Коши (6.8.3) лежит между a и x_0. Поэтому при $x \to a$ дробь $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к α. Дробь $\frac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ стремится к нулю при $x \to a$, так как $g(x_0)$ — константа (x_0 фиксирован). Аналогично $\frac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ стремится к нулю. Получаем, что для $x \to a$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha + k\varepsilon$$

Нетрудно заметить, что числитель ограничен сверху, а знаменатель ограничен снизу. Поэтому при $x \to a$ дробь имеет предел, равный α:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \alpha$$

□

6.12 Введение в анализ бесконечно малых

Определение. Величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to x_0$* , если:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$.

Определение. Если:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

То величины α и β называются *эквивалентными величинами* .

Определение. Если:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} \neq 0, \exists \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$$

То величины α и β называются *величинами одного порядка* . Аналогично, если:

$$\exists \gamma = const\colon |\alpha| \leq \gamma |\beta|$$

Определение. Если:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

То величина α является *величиной более высокого порядка* , чем β. Аналогично, если:

$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty \right) \Leftrightarrow \alpha = o(\beta)$$

6.13 Формула Тейлора

Для начала рассмотрим приращение функции, выраженное через ее производную:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow f'(a) + \alpha(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \text{ (где } \alpha(x) \text{ — бесконечно малая)}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\alpha(x)(x-a)}_{=o(x-a)}$$

Итого:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Теорема 6.13.1 (С остаточным членом в форме Пеана)**.** *Если $\exists f^{(n)}(a)$, то верно следующее равенство:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Доказательство. Введем следующий многочлен, который называется *многочленом Тейлора* :

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Будем дифференцировать этот многочлен (следует заменить, что $f(a)$ и ее производные являются постоянными, так как a — фиксированное).

$$P_n'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = f''(a) + f'''(a)(x-a) + \frac{f''''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

$$\cdots$$

Заметим следующие закономерности:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a),\ \cdots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),\ P_n^{(n+1)}(a) = 0,\ \cdots$$

Обозначим разность между многочленом Тейлора и значением функции как $R_n = f(x) - P_n(x)$ (остаточный член). Тогда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Из теоремы остается доказать, что остаточный член есть величина более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Из того, как мы взяли R_n следует, что все производные R_n в точке a вплоть до n-ой включительно равны нулю. Рассмотрим предел $\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$. Воспользуемся правилом Лопиталя (6.11):

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R_n'(x)}{n(x-a)^n}=\dots=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

Мы не можем брать дальше $(n-1)$-ой производной, так как по условию функция дифференцируема лишь в точке a, но не в ее окрестности, а R_n есть разность между значением функции и многочленом. Но из того, что функция имеет n-ую производную в точке следует, что она имеет $(n-1)$-ую производную в окрестности точки (иначе нельзя взять n-ую производную).

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(a)}{x-a}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}R_n^{(n)}(\xi)=\frac{1}{n!}R_n^{(n)}(a)=0$$

Последние переходы по теореме Лагранжа (6.8.2), ξ лежит между x и a. □

Теорема 6.13.2 (С остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Если* $\exists f^{(n+1)}(a)$*, то верно следующее равенство:*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Доказательство. Большая часть доказательства сохраняется из теоремы 6.13.1 (в частности до момента анализа остаточного члена).

Итак, $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$. Рассмотрим отношение:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(a)}{(x-a)^{n+1}-(a-a)^{n+1}}=\frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n}=$$

$$=\frac{R_n'(x_1)-R_n'(a)}{(n+1)\left((x_1-a)^n-(a-a)^n\right)}=\frac{R_n''(x_2)}{n(n+1)(x_2-a)^{n-1}}=\dots=\frac{R_n^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n-a)}=$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(x_n)-R_n^{(n)}(a)}{(n+1)!(x_n-a)}=\frac{1}{(n+1)!}R_n^{(n+1)}(\xi)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Таким образом,

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Где ξ между x и a. □

Пример (Разложение функций относительно нуля)**.**

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^{n+1})$$

7 Алгебраические операции

Convinced myself, I seek not to convince.[8]

Edgar Allan Poe

7.1 Определение основных понятий

Определение. Пусть $\mathbb{A}$ — множество. Тогда *операция* f *на* $\mathbb{A}$ — отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

Пример. *На множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *операции сложения* $(+)$ *и умножения* $(\times)$ *являются алгебраическими операциями, а операция вычитания* $(-)$ *— нет, так как разность* $2-5 = -3$ *в множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *не существует.*

Пример. *На множестве всех векторов на плоскости* $\mathbb{V}$ *операция скалярного произведения* $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ *не является алгебраической, так как она выводит из множества векторов* $\mathbb{V}$ *в множество действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Определение. *Прямое произведение (Декартово)* $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{A},\ b \in \mathbb{B}\}$. Для общего случая:

$$\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \cdots \times \mathbb{A}_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_k \in \mathbb{A}_k\}$$

То есть прямым (Декартовым) произведением произвольного количества множеств называется множество, состоящее из всех возможных строк, в которых на k-ом месте стоит элемент k-ого множества. При этом произведение (a,b) на (a',b') можно определить как $(a,b)\cdot(a',b') = (aa', bb')$, т.е. умножение идёт покомпонентно (для случая с произвольным количеством элементов в строке абсолютно аналогично).

Пример. *Прямым произведением множества* $\mathbb{A} = \{0,1,2\}$ *на множество* $\mathbb{B} = \{2,3\}$ *будет множество* $\mathbb{C}$ *всех пар* $(a,b)\,[\,a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}]$, *такое что* $\mathbb{C} = \{(0,2);(0,3);(1,2);(1,3);(2,2);(2,3)\}$

Определение. $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ — множество всех подмножеств множества $\mathbb{X}$.

Пример. *Если* $\mathbb{X} = \{0,1,2\}$, *то* $\mathbb{P}(\mathbb{X}) = \Big\{\{0\};\{1\};\{2\};\{0,1\};\{0,2\};\{1,2\};\{0,1,2\}\Big\}$

Определение. Операция называется ассоциативной, если: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)\ \forall\, a,b,c$

Определение. Операция называется коммутативной, если: $a\cdot b = b\cdot a\ \forall\, a,b$

Замечание. *Здесь и далее знаком "·" (умножение) обозначается произвольная алгебраическая операция.*

7.2 Таблицы Кэли

Если множество $\mathbb{A}$ конечно, то операции на нём можно задавать с помощью таблицы, называемой таблицей Кэли. Пусть $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда в i-ой строке и j-ом столбце будет стоять элемент из множества $\mathbb{A}$, являющийся произведением $a_i \cdot a_j$. Если таблица Кэли симметрична относительно главной диоганали, то множество с этой операцией обладает коммутативностью.

Пример. *Для множества* $\mathbb{Z}_4 = 0,1,2,3$ *с операцией* $\oplus$ *(сложение по модулю 4 на множестве остатков от деления на 4) таблица Кэли будет выглядеть следующим образом:*

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

[8]Будучи убежденным, я стремлюсь не убедить. (англ.)

7.3 Нули и единицы

Определение. Если $\mathbb{A}$ - множество с операцией, то в нём могут быть определены следующие элементы:

$$\begin{array}{ll} \text{Левая единица} & -e_1:\; e_1\cdot x = x\;\;\forall\, x \\ \text{Правая единица} & -e_2:\; x\cdot e_2 = x\;\;\forall\, x \\ \text{Левый нуль} & -z_1:\; z_1\cdot x = z_1\;\forall\, x \\ \text{Правый нуль} & -z_2:\; x\cdot z_2 = z_2\;\forall\, x \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e & -\text{двухсторонняя единица,} & \text{если } e\cdot x = x\cdot e = x\,\forall\, x \\ z & -\text{двухсторонний нуль,} & \text{если } z\cdot x = x\cdot z = z\,\forall\, x \end{array}$$

Замечание. *Если иного не указано, то в дальнейшем, если указано, что в множестве с операцией есть единица (нуль), то будем считать их двухсторонними.*

Теорема 7.3.1. *Если в множестве с операцией есть левая единица e_1 и правая единица e_2, то они совпадают.*

Доказательство.

$$\left\{\begin{array}{lll} e_1\cdot e_2 & = & e_2,\; e_1 - \text{левая единица} \\ e_1\cdot e_2 & = & e_1,\; e_2 - \text{правая единица} \end{array}\right. \Rightarrow e_1 = e_2$$

□

Теорема 7.3.2. *Если в множестве с операцией есть левый нуль z_1 и правый нуль z_2, то они совпадают.*

Доказательство. Аналогично пункту выше. □

Теорема 7.3.3. *В множестве с операцией может быть не более одной единицы.*

Доказательство. Пусть в множестве существует две двухсторонних единицы. Тогда рассмотрим выражения

$$\left\{\begin{array}{lll} e_1\cdot e_2 & = & e_2,\; e_1 - \text{единица} \\ e_1\cdot e_2 & = & e_1,\; e_2 - \text{единица} \end{array}\right. \Rightarrow e_1 = e_2$$

□

Теорема 7.3.4. *В множестве с операцией может быть не более одного нуля.*

Доказательство. Аналогично пункту выше. □

7.4 Изоморфизм

Пусть $(\mathbb{A}, *)$, $(\mathbb{B}, \circ)$ — два множества с операциями. Пусть $x, y \in \mathbb{A}$, $x', y' \in \mathbb{B}$

Определение. Два множества с операциями называются изоморфными (обозначается $\phi\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{B}$), если:

1. Существует взаимнооднозначное соответствие между $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$
2. Отображение ϕ сохраняет операцию:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{A}\colon \phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

Обозначается $(\mathbb{A}, *) \cong (\mathbb{B}, \circ)$

Пример. *Множество всех поворотов плоскости вокруг фиксированной плоскости на* $0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ *изморфно множеству* $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$.

Утверждение. *Если* $(\mathbb{A}, *) \overset{\phi}{\cong} (\mathbb{B}, \circ)$ *и* e *— единица в* $(\mathbb{A}, *)$, *то* $\phi(e)$ *— единица в* $(\mathbb{B}, \circ)$.

Утверждение. *Изоморфизм транзитивен:*

$$\mathbb{A} \overset{\phi}{\cong} \mathbb{B},\; \mathbb{B} \overset{\psi}{\cong} \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A} \overset{\psi\phi}{\cong} \mathbb{C}$$

Теорема 7.4.1. *Если ϕ - изоморфизм, то и ϕ^{-1} - изоморфизм.*

Доказательство. Так как $\exists\, \phi^{-1}$, то взаимнооднозначное соответствие уже существует. Пусть:

$$\begin{array}{ll} \phi(x) = x_1, & \phi^{-1}(x_1) = x \\ \phi(y) = y_1, & \phi^{-1}(y_1) = y \end{array}$$

Тогда:

$$\phi^{-1}(x_1 \circ y_1) = \phi^{-1}\big(\phi(x) \circ \phi(y)\big) = \phi^{-1}\big(\phi(x * y)\big) = x * y = \phi^{-1}(x_1) * \phi^{-1}(y_1)$$

□

7.5 Гомоморфизм

При гомоморфизме сохраняется операция, но не обязательно существует взаимнооднозначное соответствие. Изоморфизм является частным случаем гомоморфизма. При гомоморфизме групп (см. главу 8) верны следующие утверждения:

Утверждение. $e \to \varphi(e)$

Доказательство.

$$\varphi(a \cdot e) = \varphi(a)\varphi(e)$$

$$\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(e)$$

$$\varphi(a)^{-1}\varphi(a) = \varphi(a)^{-1}\varphi(a)\varphi(e)$$

$$e' = e' \cdot \varphi(e)$$

$$\varphi(e) = e'$$

□

Утверждение. $a^{-1} \to [f(a)]^{-1}$

Доказательство.

$$\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e)$$

$$\varphi(a)^{-1}\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}\varphi(e)$$

$$e' \cdot \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}\varphi(e) = \varphi(a)^{-1} \cdot e'$$

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$$

□

8 Теория групп

Only two things are infinite, the universe and human stupidity, and I'm not sure about the former.[9]

Albert Einstein

8.1 Полугруппы

Определение. *Полугруппа* — множество с ассоциативной операцией.

Определение. Пусть $\mathbb{X}$ — множество. Тогда $\mathbb{T}_{\mathbb{X}}$ - множество всех отображений $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{X}$. Если $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots n\}$, то $\mathbb{T}_{\mathbb{X}}$ обозначается как $\mathbb{T}_n$. В таком случае $|\mathbb{T}_n| = n^n$.

Множество всех отображений $\mathbb{T}_n$ является полугруппой преобразований множества и называется группой подстановок.

Пример.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ — \textit{отображения}}$$

1. *Отображение fg:*

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Отображение gf:*

$$g \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. *Ассоциативность:*

$$f \cdot g \cdot f = f \cdot (g \cdot f) = (f \cdot g) \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4. ...

8.2 Группы. Общие свойства. Аксимомы. Простейшие следствия

Определение. *Группа* — множество с операцией, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. Ассоциативность.
2. $\exists\, e$ (двухсторонняя единица).
3. $\forall\, a\, \exists\, b$: $ab = ba = e$ (обратный элемент; e из аксиомы 2). Обозначается: $b = a^{-1}$ ($a = b^{-1}$)

Группа является частным случаем полугруппы.

Пример.

$(\mathbb{Z}, +)$ − *группа*
$(\mathbb{R}, \cdot\,)$ − *не является группой (к нулю нет обратного*

Теорема 8.2.1. *Единица в группе единственна.*

Доказательство. См. теорему 7.3.3. □

Теорема 8.2.2. *Обратный элемент в группе единственен.*

[9]Только две вещи бесконечны: вселенная и человеческая глупость, и я не уверен первого. (англ.)

Доказательство. Пусть:

$$b_1 = a^{-1}$$

$$b_2 = a^{-1}$$

Рассмотрим произведение:

$$b_1 \cdot a \cdot b_2 = (b_1 \cdot a)b_2 = b_1(a \cdot b_2)$$

$$eb_2 = b_1 e$$

$$b_1 = b_2$$

□

Утверждение.

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Доказательство. Докажем, что $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = e$ и $(b^{-1}a^{-1}) \cdot (ab) = e$:

$$(b^{-1}a^{-1}) \cdot (ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$$

$$(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$$

□

Определение.

1. $a^0 = e$
2. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n \text{ раз}}$
3. $a^{-k} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \ \ldots \ \cdot a^{-1}}_{k \text{ раз}}$

Утверждение.

1. $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$

2. $a^{k+l} = a^k \cdot a^l$

3. $a^{kl} = (a^k)^l$

8.3 Группа подстановок. Четность подстановок

Определение. Пусть $\mathbb{X}$ — множество. Тогда $\mathbb{S}_\mathbb{X}$ - множество всех взаимооднозначных отображений $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$. Если $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots n\}$, то $\mathbb{S}_\mathbb{X}$ обозначается как $\mathbb{S}_n$. В таком случае $|\mathbb{S}_n| = n!$. Данное множество $\mathbb{S}_\mathbb{X}$ образует группу, называемую *группой подстановок* .

Множество всех отображений $\mathbb{S}_n$ является группой преобразований множества и является частным сулчаем $\mathbb{T}_n$.

Определение. *Количество инверсий* $(|\sigma|)$ — количество таких пар элементов k и l, что если $k < l$, то $i_k > i_l$.

Определение. σ называется *чётной подстановкой* , если $|\sigma| \vdots 2$

Определение. *Транспозиция* — изменение положений двух элементов между друг другом (перестановка).

Утверждение. *Единичное изменение количества транспозиций меняет чётность подстановки на противоположную.*

Доказательство.

$|k-l|=1$ В этом случае кол-во инверсий меняется на одну, так как положение меняемых элементов относительно других не меняется.

$|k-l|\geq 2$ В этом случае мы как будто проводим $2t-1$, $t=|k-l|$ элементарных транспозиции, перемещая сначала один элемент на место другого, а потом второй - на место первого. При каждой элементарной транспозиции чётность подстановки изменяется на противоположную. Следовательно, в итоге чётность транспозиции изменилась на противоположную.

□

Утверждение. $|\sigma| = |\sigma^{-1}|$

Доказательство. Два столбца в подстановке $\sigma = \begin{pmatrix} \dots & a & \dots & b & \dots \\ \dots & x & \dots & y & \dots \end{pmatrix}$ стоят "неправильно", если:

$$\big((a<c)\wedge(x>y)\big)\vee\big((a>c)\wedge(x<y)\big)$$

При этом $|\sigma|$ можно рассматривать как количество "неправильных" пар столбцов. Но так как можно сказать, что σ^{-1} образуется заменой мест строк подстановки (верхняя на нижнюю, нижняя на верхнюю), то очевидно, что количество "неправильных" пар столбцов при этом не меняется. □

8.4 Циклы

Определение. *Цикл* — подстановка, такая что $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \dots \to \alpha_k \to \alpha_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, 2, \dots n\}$. Обозначается $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k)$.

Теорема 8.4.1. *Всякая подстановка представима в виде произведения независимых циклов.*

$$\sigma = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ \dots \ \cdot \alpha_n,\ \forall\, i, j : \alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$$

Доказательство. Представим подстановку в виде графа. На графе из одного узла не может выходить более одной стрелки и в один узел не может входить более одной стрелки в силу взаимооднозначности; иначе говоря, в каждый узел входит одна стрелка и из каждого узла выходит одна стрелка. Тогда можем совершить конечное количество обходов графа по циклам. □

Замечание. *Также можно определить транспозицию как цикл длины два:* $\alpha = (i, j)$.

Теорема 8.4.2. *Всякая подстановка представима в виде произведения транспозиций.*

Доказательство. Опираясь на теорему 8.4.1, достаточно доказать, что любой цикл является произведением транспозиций. Разложение цикла в транспозиции можно определить так:

$$(k_1, k_2 \dots, k_n) = (k_1, k_2)(k_1, k_3)\dots(k_1, k_n)$$

□

Замечание. *Если* $|\sigma| \vdots 2$, *то она является произведением чётного числа транспозиций.*

8.5 Порядок элемента группы и его свойства

Определение. Порядком элемента a в группе называется наименьшее $n \in \mathbb{N}$, такое что: $a^n = e$. Обозначается $o(a) = n$. Если $\nexists o(a)$, то принято считать, что $o(a) = \infty$.

Порядок элемента группы отвечает следующим свойствам:

- $o(a^{-1}) = o(a)$

  Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$. Но $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Следовательно, $o(a^{-1}) \leq o(a)$. Заменив a^{-1} на a, получим, что $o(a^{-1}) \geq o(a)$. Следовательно, $o(a^{-1}) = o(a)$. □

- $o(g^{-1}ag) = o(a)$

  Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$. Но $(g^{-1}ag)^n = g^{-1}a^ng = e$. Следовательно $o(g^{-1}ag) \leq o(a)$. Заменив a на gag^{-1}, получим, что $o(g^{-1}ag) \geq o(a)$. Следовательно, $o(g^{-1}ag) = o(a)$. $\square$

- $o(ab) = o(ba)$

  Доказательство. Воспользуемся предыдущим пунктом: возьмем $g = a$. Тогда справедливо следующее: $o(ab) = o(g^{-1}(ab)g) = o(ba)$. $\square$

- Если $o(a) = n$ и $a^m = e$, то $m \,\vdots\, n$

  Доказательство. Пусть $o(a) = m$. Тогда $a^n = e, a^m = e$. Докажем, что $m \,\vdots\, n$. Разделим m на n с остатком: пусть $m = \alpha n + r$, $0 \leq r < n$. Тогда $e = a^m = a^{\alpha n + r} = a^{\alpha n}a^r = (a^n)^\alpha a^r = ea^r$. Следовательно, $a^r = e$, т.е. $r = 0$ (так как n — минимальное). Следовательно, $m \,\vdots\, n$. $\square$

- Если $o(a) = n$, $(k; n) = 1$, то $o(a^k) = o(a)$

  Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$. Можно показать, что $(a^k)^n = e$, $(a^n)^k = e$. Тогда $o(a^k) \leq n$. Пусть $\exists\, t \in (0; n)$, такой, что $(a^k)^t = a^{kt} = e$. Тогда $\Rightarrow kt \,\vdots\, n \Rightarrow t \,\vdots\, n$ (так как $(k; n) = 1$, однако $t \leq n$. Противоречие. Следовательно, $o(a^k) = n$. $\square$

- Если $o(a) = n$, $k|n$, то $o(a^k) = \frac{n}{k}$

  Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = a^{kd} = (a^k)^d = e$. Тогда $\Rightarrow o(a^k) \leq d$. Пусть $\exists t \in (0; d)$, что $(a^k)^t = a^{kt} = e$. Но $kt \,\vdots\, n$ (по пункту 4). И т.к. $kt < n \Rightarrow \nexists t$. Противоречие. Следовательно $o(a^k) = d = \frac{n}{k}$. $\square$

Je n'ai pas de temps. [10]

[10] У меня нет времени. (фр.)