

Предисловие

Всё время шагая вперёд, ты никогда не увидишь того, что ещё находится за горизонтом. В том числе и за горизонтом твоего воображения. В конце девятого класса никто из нас, будущей первой группы, не знал, что же ждёт нас впереди, какие горизонты откроются перед нами через два года. В десятый класс мы шли с огромными амбициями и со взглядом, устремлённым в будущее. Со временем вера в себя только укреплялась, в одиннадцатый класс каждый из нас уже шёл с определённой целью, за достижение которой он был готов биться изо всех сил. Особенно приятно будет осознавать, что поставленная цель достигнута. Стремление вперёд, к победе и успеху помогло нам всем вместе преодолеть эти не совсем трудные, но и нелёгкие два года обучения.

За эти два года мы изучили огромное количество материала, выходящего далеко за рамки школьной программы. Многие оказались полезными, что-то было скучным, но в любом случае эти знания не останутся лежать бесполезным грузом в нашей памяти. И хочется поблагодарить всех наших учителей математики, кто вёл наши уроки ещё с восьмого класса за их труд и терпимость: профессора, доктора физико-математических наук Кожухова Игоря Борисовича, доцента, кандидата физико-математических наук Соколову Татьяну Владимировну, Писаренко Игоря Борисовича, Пикалову Марину Сергеевну, Захарову Маргариту Юрьевну.

Почти всё из изученного изложено ниже при непосредственном участии Ивана, инициатора этого «проекта», и Бориса, подхватившего идею на лету; некоторые главы были изложены Кириллом и Александром, за что им тоже большое спасибо. Надеемся, что этот труд, который помог нам сдать все запланированные коллоквиумы, пригодится ещё кому-нибудь, а, может, неизвестный друг напишет новые главы? Удачи!

Они — первая группа...

Агафонцев Борис Валерьевич Покорил Воробьевы горы, выбирает между мехматом МГУ и ФУПМ МФТИ (он же теперь ФПМЭ). Один из пяти, кто решил все задачи на физике в МИЭТе. Там же получил диплом I степени по математике. В Санкт-Петербурге, вместе с Жалниным и Пузыревским, получил диплом III степени на VI всероссийской командной олимпиаде школьников по программированию. В Москве был награжден похвальной грамотой на личной олимпиаде по информатике. По дороге домой заехал в МФТИ и набрал максимальный балл по физике.

О себе: Одаренный ребёнок. Но жутко ленивый, дерзкий, грубый и эгоистичный... и вместе с тем каждый всегда может открыть в нём для себя светлые стороны его души.

Блохин Илья Сергеевич Идет на физфак МГУ. Или на ЭКТ в МИЭТ, где получил диплом I степени по физике. Еще не определился. Зато ездил на всероссийскую конференцию «Электронная Россия», привез грамоту второй степени.

О себе: Мягкий и пушистый, не кусается.

Горбачук Мария Васильевна Поступает на мехмат МГУ. В МИЭТе получила диплом II степени по физике и по математике.

О себе: Необычный, очаровательный, любвеобильный человек, состоящий из внутренних противоречий. Побеждает предрассудки собственным разумом.

Жалнин Кирилл Владимирович Идет на мехмат МГУ. В МИЭТе заработал диплом III степени по физике и математике. Ездил на VI всероссийскую командную олимпиаду школьников по программированию, где получил диплом III степени.

О себе: Спокойный, ленивый. С детства погрузился в компьютерные технологии. «Человек идеи» — может заниматься альтруизмом ради идеи. Может бросить что-либо, если это ему не нравится.

Заблоцкий Сергей Владимирович Идет в МГТУ им. Баумана и на физический факультет МГУ. Обладатель диплома I степени по физике в МИЭТе. Участник всероссийской конференции «Электронная Россия», где получил грамоту II степени.

О себе: Безмерно умен, безмерно красив.

Михеев Лев Игоревич Поступает на физический факультет МГУ и в МГТУ им. Баумана на факультет радиоэлектроники и лазерной техники. В МИЭТе получил диплом III степени по математике. Участвовал всероссийской конференции «Электронная Россия», где получил грамоту II степени.

О себе: Экспрессивный, эмоциональный и жезнерадостный молодой человек. Иногда ленивый, но когда нужно, может быть упорным и целеустремлённым. Вполне миролюбивый, но возможны проявления различных форм агрессии. Как и многие юноши, не может жить без баскетбола и футбола, с помощью которых снимает нервное напряжение.

Потапов Данила Сергеевич Залез на Воробьевы горы, на механико-математический. Но все равно хочет пойти на ВМиК. Обладает дипломами I степени по физике и математике в МИЭТе. На личной московской олимпиаде по информатике получил похвальную грамоту.

О себе: Скип зеленоградской команды по кёрлингу. Это говорит само за себя.

Пузыревский Иван Витальевич Случайно поступил на ВМиК, поэтому идет на мехмат МГУ. Другой из пяти, кто решил в МИЭТе все задания по физике. Ездил в Санкт-Петербург с Агафонцевым и Жалниным на VI всероссийскую командную олимпиаду школьников по программированию, где получил диплом III степени. В личной московской олимпиаде по информатике получил также диплом III степени. На московской математической – похвальную грамоту.

О себе: Тактично наблюдает за происходящим и крутит невидимые шестеренки для достижения своих целей.

Соколов Георгий Дмитриевич Идет в Московский физико-технический институт (государственный университет). В МИЭТе получил диплом I степени как по математике, так и по физике. В Москве награжден дипломом III степени на математической олимпиаде.

О себе: Самонадеянный человек. Думает, что всё возможно.

Толокольников Александр Викторович Идет на мехмат. Для этого, помимо диплома I степени в МИЭТе по физике и II степени – по математике, получил диплом III степени на Московский математической олимпиаде. До 11 класса долго и упорно участвовал в различных мероприятиях, олимпиадах, марафонах. За что был приглашен в такие школы, как №57 и Лицей "Вторая школа но сохранил верность Alma Mater.

О себе: Человек, которого можно узнать по бороде. Самоуверен, настойчив, трудолюбив и целенаправлен... лишь тогда, когда считает это нужным. Обожает смеяться над всеми, в том числе и над собой, считая смех - лучшим решением всех проблем. Ну а всё остальное — узнаете при знакомстве.

Ускова Ксения Эдуардовна Поступает в Финансовую академию и на экономический факультет МГУ. В МИЭТе получила диплом III степени по физике и II степени по математике.

О себе: Станный человек. Любит математику. Хочет стать космонавтом. Оптимист по жизни. Ненавидит любые ограничения, идущие в разрез с её мнением.

Хисматуллин Артур Ильдарович По результатам «Покори Воробьевы горы» прошел на мехмат. Хотел учиться на ВМиК. За математику в МИЭТе получил диплом II степени, а за физику — III степени.

О себе: Спокойный, в меру ленивый, увлекается компьютерными технологиями, занимается плаванием. Относится к окружающим сдержанно, даже холодно.

Оглавление

1	10 класс. I полугодие	9
1.1	Математическая логика	11
1.1.1	Операции над высказываниями. Логические законы.	11
1.1.2	Принцип математической индукции	12
1.2	Неравенство Бернулли	15
1.3	Неравенство Коши	15
1.4	Комбинаторика	17
1.4.1	Размещения без повторений	17
1.4.2	Размещения с повторениями	17
1.4.3	Перестановки	17
1.4.4	Сочетания без повторений	17
1.4.5	Сочетания с повторениями	18
1.4.6	Бином Ньютона	19
1.4.7	Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. . .	19
1.4.8	Полиномиальная формула	20
1.5	Сравнения	23
1.5.1	Свойства сравнений	23
1.5.2	Китайская теорема об остатках	24
1.6	Простые числа и их свойства	25
1.6.1	Основная теорема арифметики	25
1.6.2	Малая теорема Ферма	26
1.6.3	Теорема Вильсона	27
1.6.4	Другие свойства	28
1.7	Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.	29
1.7.1	Алгоритм Евклида	29
1.7.2	Следствия из алгоритма Евклида:	30
1.8	Диофантовы уравнения	31
1.8.1	Линейные диофантовы уравнения	31
1.8.2	Уравнение Пелля	31
1.9	Теорема и функция Эйлера	35
1.9.1	Функция Эйлера	35
1.9.2	Теорема Эйлера	35
1.9.3	Мультипликативность функции Эйлера	36
2	10 класс. II полугодие	39
2.1	Пределы числовых последовательностей	41
2.1.1	Определение числовой последовательности. Ограниченность.	41
2.1.2	Свойства пределов числовых последовательностей	42
2.1.3	Бесконечно малые последовательности	43

2.1.4	Бесконечно большие последовательности	43
2.1.5	Теоремы о сумме, произведении и частном пределов	44
2.2	Пределы функций	45
2.2.1	Пределы функций в точке	45
2.2.2	Пределы функций на бесконечности	45
2.2.3	Бесконечные пределы	45
2.2.4	Теоремы о сумме, произведении и частном пределов	46
2.3	Непрерывность функций	47
2.3.1	Определение непрерывности функции	47
2.3.2	Теоремы о сумме, произведении и частном непрерывных функций	47
2.3.3	Свойства функций, непрерывных на отрезке	47
2.3.4	Теорема о непрерывности элементарных функций	50
2.3.5	Асимптоты	50
2.4	Производная функции	53
2.4.1	Определение производной функции	53
2.4.2	Связь дифференцируемости с непрерывностью	53
2.4.3	Теоремы о сумме, произведении и частном производных функций	53
2.4.4	Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.	54
2.4.5	Производные основных функций	55
2.4.6	Производная сложной и обратной функции	56
2.4.7	Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши	56
2.4.8	Экстремум функции. Необходимое условие экстремума	58
2.4.9	Связь производной с монотонностью. Достаточное условие экстремума	59
2.4.10	Правило Лопиталя	59
2.4.11	Введение в анализ бесконечно малых. Формула Тейлора	61
2.5	Замечательные пределы	65
2.5.1	Первый замечательный предел	65
2.5.2	Второй замечательный предел. Число e	66
2.6	Алгебраические операции	69
2.6.1	Определение основных понятий	69
2.6.2	Изоморфизм	70
2.6.3	Гомоморфизм	71
2.7	Теория групп	73
2.7.1	Полугруппы	73
2.7.2	Группы	73
2.7.3	Циклы	75
2.7.4	Порядок элемента группы	76
2.8	Действительные числа	79
2.8.1	Основные определения	79
2.8.2	Аксиомы действительных чисел	80
2.8.3	Супремум и инфимум. Принцип вложенных отрезков	80
2.9	Комплексные числа	83
2.9.1	Определение комплексных чисел. Основные свойства	83
2.9.2	Алгебраическая форма. Основные понятия	84
2.9.3	Тригонометрическая форма. Формула Муавра	85
2.9.4	Примеры применения комплексных чисел	86

3	11 класс. I полугодие	89
3.1	Объемы тел	91
3.1.1	Аксиомы теории мер	91
3.1.2	Неизмеримые множества	91
3.1.3	Объемы простейших геометрических тел	92
3.2	Операции с векторами	97
3.2.1	Векторное произведение векторов	97
3.2.2	Смешанное произведение векторов	99
3.3	Теория матриц	101
3.3.1	Определения	101
3.3.2	Элементарные матричные преобразования (обзор).	101
3.3.3	Определитель матрицы	102
3.3.4	Свойства определителей	102
3.3.5	Частные случаи при вычислении определителя	103
3.3.6	Треугольная матрица	106
3.3.7	Разложение определителя по строке или столбцу	106
3.3.8	Определитель произведения матриц	111
3.3.9	Обратная матрица	112
3.4	Системы линейных уравнений	115
3.4.1	Матричный вид СЛУ	115
3.4.2	Правило Крамера	116
3.4.3	Определитель Вандермонда. Интерполяция	117
3.5	Поля и кольца	119
3.5.1	Основные понятия	119
3.5.2	Кольцо многочленов	122
3.5.3	Поле рациональных функций. Разложение на простейшие дроби	124
3.6	Первообразная и интеграл	129
3.6.1	Определение первообразной и интеграла	129
3.6.2	Таблица некоторых первообразных	130
3.6.3	Основные свойства	130
3.6.4	Дифференциал	130
3.6.5	Свойства дифференциала. Таблица дифференциалов.	131
3.6.6	Методы интегрирования.	131
3.7	Определенный интеграл	135
3.7.1	Определение интеграла	135
3.7.2	Свойства интеграла	136
3.7.3	Ограниченность функции и аддитивность интеграла	136
3.7.4	Ограниченная неинтегрируемая функция	138
3.7.5	Теорема Гейне-Бореля	139
3.7.6	Равномерная непрерывность функций	140
3.7.7	Суммы Дарбу	142
3.7.8	Критерий интегрируемости	144
3.7.9	Интегрируемость функций	145
3.7.10	Интегрирование неравенств	146
3.8	Эллиптические кривые второго порядка	149
3.8.1	Эллипс	149
3.8.2	Гипербола	151

3.8.3	Гиперболические функции	153
3.8.4	Гиперболический поворот	153
3.8.5	Парабола	155
3.8.6	Приведение к каноническому виду кривой второго порядка	157
3.8.7	Общие свойства кривых второго порядка	158
3.9	Проективная геометрия	159
3.9.1	Перспективная проекция. Проективная плоскость.	159
3.9.2	Однородные координаты	161
3.9.3	Проективные преобразования	161
3.9.4	Теорема Дезарга	164
3.9.5	Построение направления на недоступную вершину угла	165
3.9.6	Теорема Паппа	165
3.9.7	Модели проективной плоскости	166
3.9.8	Конечные проективные плоскости. Проективное пространство.	167
4	11 класс. II полугодие	171
4.1	Abstract	171
5	Final	173

1 10 класс. I полугодие

Вопросы к экзамену за 1 полугодие 10 класса

1. Операции над высказываниями. Логические законы
2. Принцип математической индукции
3. Неравенство Бернулли
4. Неравенство Коши
5. Размещения с и без повторений. Перестановки
6. Сочетания с и без повторений
7. Бином Ньютона
8. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля
9. Полиномиальная формула
10. Сравнения
11. Простые числа и их свойства
12. Наибольший общий делитель. Алгоритм Эвклида
13. Основная теорема арифметики
14. Малая теорема Ферма
15. Теорема Вильсона
16. Диофантовы уравнения
17. Теорема и функция Эйлера
18. Мультипликативность функции Эйлера
19. Китайская теорема об остатках
20. Уравнение Пелля

1.1 Математическая логика

*We can only see a short distance ahead, but
we can see plenty there that needs to be done*

Alan Turing

1.1.1 Операции над высказываниями. Логические законы.

Высказывание — это утверждение. Оно может быть истинным или ложным. Над высказываниями определены следующие операции:

Отрицание: Если A — высказывание, то $\neg A$ — отрицание A ("не" A ; $\bar{A}$). $\neg A$ истинно, если A ложно.

Пример. $A : x = y$; $\neg A : x \neq y$.

Конъюнкция: Высказывание, которое истинно, если высказывания A и B истинны. $A \wedge B$, $A \& B$.

Пример.

A : данный четырехугольник — ромб;

B : данный четырехугольник — прямоугольник;

$A \wedge B$: данный четырехугольник — квадрат.

Дизъюнкция: Высказывание, которое истинно, когда хотя бы одно из A и B истинно. $A \vee B$.

Импликация: $A \Rightarrow B$. Если A , то B . A влечет B . $A \Rightarrow B$ ложно, если A — истинно, а B — ложно. Принцип ложности посылки: Выражение $A \Rightarrow B$ (где A — посылка, B — заключение) истинно, когда A ложно, независимо от B .

Эквиваленция: $A \Leftrightarrow B$. Высказывание, которое истинно, если $A \wedge B$ истинно или $A \wedge B$ ложно.

Существуют некоторые логические законы:

1. Коммутативность, ассоциативность для "не" и "или".
2. $A \wedge A = A$
3. $A \vee A = A$
4. $A \wedge \neg A \equiv \text{Ложь}$
5. $A \vee \neg A \equiv \text{Истина}$
6. $\neg \neg A = A$

Математические высказывания можно представить в виде таблиц истинности.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
Истина	Истина	Истина	Истина	Истина	Истина
Истина	Ложь	Ложь	Истина	Ложь	Ложь
Ложь	Истина	Ложь	Истина	Истина	Ложь
Ложь	Ложь	Ложь	Ложь	Истина	Истина

Другие логические законы и теоремы (доказываются с помощью таблиц истинности):

1. $(A \vee B)C = AC \vee BC$, — дистрибутивность.
2. $(AB) \vee C = (A \vee C)(B \vee C)$
3. Законы де Моргана: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
4. $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$
5. $A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow \neg A$, — закон контрпозиции.
6. Импликация не обладает коммутативностью и ассоциативностью.
7. Эквиваленция обладает коммутативностью, но не ассоциативностью.

1.1.2 Принцип математической индукции

Элементарно, Ватсон!

Артур Конан Дойль. «Записки о Шерлоке Холмсе»

Определение. *Дедукция* — переход от общего к частному.

Определение. *Индукция* — переход от частного к общему.

Пусть $A(n)$ — высказывание, зависящее от $n \in \mathbb{N}$, и выполнены условия:

1. $A(1) = \text{Истина}$
(базис индукции)
2. $\underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}, A(k) = \text{Истина})}_{\text{Предположение}} \Rightarrow \underbrace{(A(k+1) = \text{Истина})}_{\text{Заключение}}$ (индукционный переход)

Тогда $A(n) = \text{Истина}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. В различных модификациях ММИ можно брать не $n = 1$, а другое n .

Существует усиленный принцип индукции, который следует из ММИ. То есть если выполнены условия

1. $A(1) = \text{Истина}$
2. $\forall k \in \mathbb{N} \mid A(1), A(2), \dots, A(k) = \text{Истина} \mid \Rightarrow A(k+1) = \text{Истина}$,

то $A(n) = \text{Истина}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Докажем, что ММИ $\Leftrightarrow$ УПИ. Для этого выведем ММИ из УПИ и наоборот:

Доказательство ($\Leftarrow$). Нам дано, что $A(1) = \text{Истина}$, $A(k) = \text{Истина} \Rightarrow A(k+1) = \text{Истина}$. Также известно, что УПИ верен. Доказательство очевидно. $\square$

Доказательство ($\Rightarrow$). Теперь нам дано, что $A(1) = \text{Истина}$ и $A(1) \wedge \dots \wedge A(k) = \text{Истина} \Rightarrow A(k+1) = \text{Истина}$ и известно, что ММИ верен.

Возьмем такое $B(k)$, что:

$$B(k) = \bigcap_{i=1}^n A(i)$$

Пусть $B(k)$ — истинно. Тогда надо доказать, что $B(k+1) = \text{Истина}$. Так как $B(k) = \text{Истина}$, то $A(1), A(2), \dots, A(k)$ — истинно. Следовательно, $A(k+1) = \text{Истина}$. Тогда $(B(k) \Rightarrow B(k+1)) = \text{Истина}$ и $A(n) = \text{Истина}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

1.2 Неравенство Бернулли

There is no philosophy which is not founded upon knowledge of the phenomena, but to get any profit from this knowledge it is absolutely necessary to be a mathematician.

Daniel Bernulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Докажем по принципу ММИ. Для $n = 1$ неравенство выполняется. Пусть для $n = k$ выражение также верно, т.е. $(1+x)^k \geq 1+kx$.

Рассмотрим выражение для $n = k+1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &\geq 1+kx+x \\ (1+x) \times \underbrace{(1+x)^k}_{\geq 1+kx} &\geq 1+kx+x \\ (1+x) \times (1+kx) &\geq 1+kx+x \\ 1+kx+x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0} &\geq 1+kx+x \end{aligned}$$

Т.к. импликация верна, то неравенство доказано. $\square$

1.3 Неравенство Коши

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Замечание. Если $\exists i \mid x_i = 0 \Rightarrow \text{const} \geq 0$. Далее будем считать, что $\forall x_i > 0$.

Замечание. Неравенство однородное. т.е. если $\exists (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая неравенству, то $\exists (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ — верно. Тогда можно считать, что $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ (тогда $\lambda = \sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i}}$).

Следовательно, надо доказать:

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i = 1 \right) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \geq n \right)$$

Доказательство. Докажем индукцией по n . Для $n = 1$ неравенство верно. Рассмотрим выражение для n членов. Обязательно $\exists x_i \geq 1$ и $\exists x_j \leq 1$ (если надо — перенумеровать). Пусть $x_{n-1} \leq 1$ и $x_n \geq 1$. Предположим, что для $n-1$ элементов неравенство верно. Возьмем такой элемент $a = x_{n-1} \times x_n$. Тогда верны следующие равенства:

$$\underbrace{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n-2} \times a}_{n-1 \text{ элементов}} = 1$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + a \geq n - 1$$

Рассмотрим неравенство для n членов. Надо доказать, что $x_1 + \cdots + x_n \geq n$, если $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. Прибавим и отнимем a в левой части:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} + a}_{\geq n-1} + x_{n-1} + x_n - a \geq n \quad (\text{надо доказать})$$

$$(n-1) + x_{n-1} + x_n + \underbrace{(x_{n-1} \times x_n)}_a \geq n$$

$$n + (x_n - 1) - ((x_{n-1} \times x_n) + x_{n-1}) \geq n$$

$$n + \underbrace{(x_n - 1)}_{\geq 0} \underbrace{(1 - x_{n-1})}_{\geq 0} \geq n$$

См. замечания

□

1.4 Комбинаторика

An optimist may see a light where there is none, but why must the pessimist always run to blow it out?

Rene Descartes

1.4.1 Размещения без повторений

Определение. *Размещением* из n элементов по k называется упорядоченный набор из k элементов из n -элементного множества.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_k)$$

Обозначается как $\mathbf{A}_n^k$.

Вывод: пусть мы заполняем ячейки n -элементной таблицы элементами $1, 2, \dots, i, \dots, k$. Соответственно, в первую ячейку можно поместить один из n элементов, во вторую — $n - 1$ и т. д. То есть в первую и вторую ячейку можно поставить элементами $n \times (n - 1)$ способами. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^k &= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - k + 1) = \\ &= \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - k + 1) \times (n - k) \times (n - k - 1) \times \dots \times 1}{(n - k) \times (n - k - 1) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

1.4.2 Размещения с повторениями

Определение. *Размещением с повторениями* из n элементов по k называется упорядоченный набор из k элементов из n -элементного множества с возможностью повторения элементов в наборе. Обозначается как $\tilde{\mathbf{A}}_n^k = n^k$.

1.4.3 Перестановки

Определение. *Перестановка* из n элементов — это упорядоченный набор элементов из n -элементного множества, в котором все элементы участвуют по одному разу. Обозначается как $\mathbf{P}_n$.

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{A}_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

1.4.4 Сочетания без повторений

Определение. *Сочетанием* из n элементов по k называется неупорядоченный набор из k элементов из n -элементного множества. Обозначается как $\mathbf{C}_n^k$

Вывод: выпишем все сочетания без повторений из n по k по одному разу:

$$\begin{aligned} &\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}\} \\ &\{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}\} \\ &\dots \\ &\underbrace{\{a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sk}\}}_{k \text{ элементов}} \end{aligned}$$

Всего таких сочетаний C_n^k , каждое из них образует P_k размещений. Таким образом в каждом из C_n^k сочетаний находится P_k размещений. Это будут все размещения, каждое по одному разу, без повторений. Таким образом:

$$\begin{aligned} A_n^k &= C_n^k \times P_k \\ C_n^k &= \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

1.4.5 Сочетания с повторениями

Определение. Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется неупорядоченный набор из k элементов из n -элементного множества с возможностью повторения элементов в наборе.

Обозначается как $\tilde{C}_n^k$.

Вывод: пусть дано n -элементное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Возьмем какое-либо сочетание с повторениями и упорядочим элементы в нем. Например: $(a_1, a_1, a_2, a_3, a_6, a_6, \dots)$. Обозначим каждый элемент как точку, а на месте смены индекса элемента поставим палочку.

Пример. Из множества $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$:

$$(a_1, a_1, a_3, a_5) \rightarrow \square\square \parallel \square \parallel \square$$

$$(a_3, a_3, a_3, a_4) \rightarrow \parallel \square\square\square \mid \square \mid$$

$$(a_2, a_2, a_4, a_4) \rightarrow \mid \square\square \parallel \square\square \mid$$

$$(a_1, a_2, a_5, a_5) \rightarrow \square \mid \square \parallel \parallel \square\square$$

$$(a_1, a_2, a_4, a_4) \rightarrow \square \mid \square \parallel \square\square \mid$$

Таким образом можно однозначно сопоставить неупорядоченный набор с последовательностью точек и единиц. Тогда для задания неупорядоченного набора из k элементов из n -элементного множества необходимо выбрать k точек из $n + k - 1$ ячеек.

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

1.4.6 Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a^n + na^{n-1}b + \cdots + \mathbf{C}_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n}_{2^n \text{ неприведенных слагаемых}}$$

Таким образом,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}_n^k \times a^{n-k} \times b^k$$

$$T_{k+1} = \mathbf{C}_n^k \times a^{n-k} \times b^k$$

1.4.7 Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

1. $\mathbf{C}_n^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k-1} = \mathbf{C}_{n+1}^k$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n! \times k}{k!(n-k)!(n-k+1)} = \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n! \times k}{k!(n-k)!(n-k+1)} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \mathbf{C}_{n+1}^k \end{aligned}$$

□

3. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \times \mathbf{C}_n^k = 0$

Доказательство. Докажем индукцией по n . Проверим для $n = 1$:

$$\mathbf{C}_1^0 - \mathbf{C}_1^1 = 1 - 1 = 0$$

Предположим, что для $n = m, m \in \mathbb{N}$ выражение верно:

$$\mathbf{C}_m^0 - \mathbf{C}_m^1 + \cdots + (-1)^m \mathbf{C}_m^m = 0$$

Рассмотрим выражение для $n = m + 1$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{C}_{m+1}^0}_{=1} - \mathbf{C}_{m+1}^1 + \cdots + (-1)^m \mathbf{C}_{m+1}^m + (-1)^{m+1} \underbrace{\mathbf{C}_{m+1}^{m+1}}_{=1} &= \\ &= 1 - \mathbf{C}_{m+1}^1 + \cdots + (-1)^m \mathbf{C}_{m+1}^m + (-1)^{m+1} = \\ &= 1 - (\mathbf{C}_m^0 + \mathbf{C}_m^1) + (\mathbf{C}_m^1 + \mathbf{C}_m^2) - \cdots + (-1)^m (\mathbf{C}_m^{m-1} + \mathbf{C}_m^m) + (-1)^{m+1} = \\ &= 1 - \underbrace{\mathbf{C}_m^0}_{=1} + (-1)^m \underbrace{\mathbf{C}_m^m}_{=1} + (-1)^{m+1} = \\ &= 1 - 1 + (-1)^m + (-1)^{m+1} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Треугольник Паскаля получается из свойства суммы биномиальных коэффициентов.

Каждый ряд является рядом биномиальных коэффициентов для разложения, степень которого равна номеру ряда (начиная с нуля).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \dots & & & & & &
 \end{array}$$

1.4.8 Полиномиальная формула

Полиномиальная формула является обобщением бинома Ньютона.

Рассмотрим выражение $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$:

$$\begin{aligned}
 (a_1 + \dots + a_k)^n &= \underbrace{(a_1 + \dots + a_k) \times (a_1 + \dots + a_k) \times \dots \times (a_1 + \dots + a_k)}_{n \text{ раз}} = \\
 &= a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n + n \times a_1^{n-1} \times a_2 + \dots + \square \times a_1^{i_1} \times a_2^{i_2} \times \dots \times a_k^{i_k} + \dots = \\
 &= \sum_{\sum_{j=1}^k i_j = n} \left(\square \times \prod_{j=1}^k \binom{i_j}{a_j} \right)
 \end{aligned}$$

Числа $i_1, i_2, \dots, i_k$ отображают, сколько чисел каждого типа будет в данном члене разложения. При этом коэффициент перед этим первым числом будет определяться как $\mathbf{C}_n^{i_1}$, перед вторым $\mathbf{C}_{n-i_1}^{i_2}$, ..., перед k -тым: $\mathbf{C}_{n-(i_1+i_2+\dots+i_{k-1})}^{i_k}$. Соответственно, коэффициент перед членом разложения будет определяться произведением этих чисел.

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{C}_n^{i_1} \times \mathbf{C}_{n-i_1}^{i_2} \times \mathbf{C}_{n-(i_1+i_2)}^{i_3} \times \dots \times \underbrace{\mathbf{C}_{n-(i_1+i_2+\dots+i_{k-1})}^{i_k}}_{=1} = \\
 &= \frac{n!}{i_1! \times (n-i_1)!} \times \frac{(n-i_1)!}{i_2! \times (n-(i_1+i_2))!} \times \frac{(n-(i_1+i_2))!}{i_3! \times (n-(i_1+i_2+i_3))!} \times \dots \\
 &\dots \times \frac{(n-(i_1+\dots+i_{k-2}))!}{i_{k-2}! \times (n-(i_1+\dots+i_{k-2}))!} \times \frac{(n-(i_1+\dots+i_{k-2}))!}{i_{k-1}! \times \underbrace{(n-(i_1+\dots+i_{k-1}))!}_{i_k!}} = \\
 &= \frac{n!}{i_1! \times i_2! \times \dots \times i_{k-1}! \times i_k!}
 \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \frac{n!}{i_1! \times \dots \times i_k!} \times (a_1^{i_1} \times \dots \times a_k^{i_k})$$

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j \right)^n = \sum_{(\sum_{j=1}^k i_j) = n} \left(\frac{n!}{\prod_{j=1}^k i_j!} \times \prod_{j=1}^k a_j^{i_j} \right)$$

Число неподобных членов в разложении равно $\tilde{C}_k^n$ (получается, если представить n ячеек, в которые необходимо расставить с повторениями цифры от 1 до k). Сумма положительных коэффициентов при членах разложения равна k^n .

1.5 Сравнения

Who in the world am I? Ah, that's the great puzzle.

Lewis Carroll

Каждое число при делении на другое дает какой-либо остаток. Обозначается как $a \equiv b \pmod{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $|a - b| : n$ (a сравнимо с b по модулю n ; т.е. $|a - b|$ делится на n).

1.5.1 Свойства сравнений

1. $a \equiv a \pmod{n}$.

2. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$ (симметричность).

3. $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$ (транзитивность)

Доказательство.

$$(a - b : n) \wedge (b - c : n) \Rightarrow (a - c : n) \Rightarrow (a \equiv c \pmod{n})$$

□

4. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{n}$

Доказательство.

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a - b : n \Rightarrow a - b = n \times d, d \in \mathbb{Z}$$

$$a - b = n \times d \Rightarrow (a + c) - (b + c) = n \times d \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{n}$$

□

5. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$

Доказательство.

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a - b : n$$

$$(a - b) \times c : n \Rightarrow ac - bc : n \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$$

□

6. $(a \equiv b \pmod{n}) \wedge (c \equiv d \pmod{n}) \Rightarrow (a + c \equiv b + d \pmod{n})$

Доказательство.

$$(a - b = xn) \wedge (c - d = yn)$$

$$(a - b) + (c - d) = (x + y)n$$

$$(a + c) - (b + d) = (x + y)n$$

$$\Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$$

□

$$7. (a \equiv b \pmod{n}) \wedge (c \equiv d \pmod{n}) \Rightarrow (ac \equiv bd \pmod{n})$$

Доказательство.

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$$

$$c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow bc \equiv bd \pmod{n}$$

$$\Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$$

□

1.5.2 Китайская теорема об остатках

Теорема 1.5.1. Система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{b_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{b_2} \\ x \equiv a_3 \pmod{b_3} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{b_n} \end{cases}$$

имеет единственное решение $x \equiv a \pmod{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}$ при попарно взаимно простых $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$.

Доказательство. Докажем индукцией по n . Для $n = 1$ очевидно. Предположим, что для $n = k$ верно (т.е. система имеет решение $x \equiv c_1 \pmod{b_1 b_2 b_3 \dots b_k}$). Тогда надо доказать, что система

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{b_1 b_2 b_3 \dots b_k} \\ x \equiv c_2 \pmod{b_{k+1}} \end{cases}$$

всегда имеет решение. Пусть $b_1 b_2 b_3 \dots b_k = B, b_k + 1 = b$. Тогда

$$\begin{cases} x = uB + c_1 \\ x = vb + c_2 \end{cases}$$

$$uB + c_1 = vb + c_2$$

$$uB - vb = c_2 - c_1$$

Получили диофантово уравнение относительно u и v . Оно имеет решения, т.к. B и b взаимнопростые.

$$\begin{cases} u = u_0 + b\tau \\ v = v_0 + B\tau \end{cases}, \tau \in \mathbb{Z}$$

$$x = B(u_0 + b\tau) + c_1$$

$$x \equiv \underbrace{Bu_0 + c_1}_{c_3} \pmod{Bb}$$

$$x \equiv c_3 \pmod{b_1 b_2 b_3 \dots b_k b_{k+1}}$$

□

1.6 Простые числа и их свойства

*We build too many walls and not enough
bridges.*

Isaac Newton

Определение. Пусть a — натуральное число. a называется *простым*, если $a \neq 1$ и $\forall x, y \in \mathbb{N} \mid a = xy \Rightarrow (x = a) \vee (y = a)$.

1.6.1 Основная теорема арифметики

Теорема 1.6.1. *Всякое натуральное число раскладывается на произведение простых чисел, причём единственным образом.*

Доказательство существования разложения. Докажем усиленным принципом математической индукции. $n \in \mathbb{N}$. $n = 1$:

$$n = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{0 \text{ раз}}$$

Пусть все натуральные числа, меньшие n раскладываются. Докажем, что n раскладывается на простые множители. Возможны два случая.

1. n — простое. Тогда разложение очевидно.
2. n — составное. Тогда $n = ab \mid (a < n) \wedge (b < n)$. По предположению индукции a и b раскладываются на простые числа. Тогда и n раскладывается на простые числа.

□

Доказательство единственности. n — натуральное число.

$$n = p_1 \times \cdots \times p_k$$

Пусть существует другое разложение:

$$n = q_1 \times \cdots \times q_l$$

Приравняем:

$$p_1 \times \cdots \times p_k = q_1 \times \cdots \times q_l$$

Правая часть равна n и делится на q_1 . Значит левая часть тоже делится на q_1 . А т.к. все p_i простые, то $\exists j \in \mathbb{N}, j \leq k \mid p_j = q_1$. Сократим и перенумеруем, начиная с двух.

$$p_2 \times \cdots \times p_k = q_2 \times \cdots \times q_l$$

Аналогично продолжаем сокращать. В какой-то момент слева или справа будет единица. т.к. левая и правая часть определяли одну и ту же часть и сокращали на одинаковые числа, то в другой части тоже должна стоять единица. Значит $k = l$ и $\{p_i\} = \{q_j\}$. □

1.6.2 Малая теорема Ферма

Теорема 1.6.2. $a^p \equiv a \pmod{p}$, если p - простое, $a \in \mathbb{Z}$

Доказательство. 1. Если $a \vdots p$, то $0 \equiv 0 \pmod{p}$.

2. Тогда можно считать, что $(a; p) = 1$. Докажем, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

3. Выпишем все нулевые остатки от деления на p :

$$A = \{1, 2, 3, \dots, p-2, p-1\}$$

Причем $a \bmod p \in A$.

4. Найдем все элементы A , помноженные на a :

$$\underbrace{a \times 1, a \times 2, a \times 3, \dots, a \times (p-2), a \times (p-1)}_{\text{Все разные по модулю } p, \text{ все ненулевые по модулю } p}$$

Докажем, что они все разные по модулю p .

Предположим, что $\exists i, j \mid a \times i \equiv a \times j \pmod{p}, i \neq j$.

Тогда $a \times (i - j) \vdots p$

Из этого получаем:

$$a \vdots p \tag{1.1}$$

$$i - j \vdots p \tag{1.2}$$

Должно выполняться условие 1.1 или 1.2.

Выражение 1.1 неверно по предположению, что $(a; p) = 1$.

Выражение 1.2 неверно, потому что $i, j < p \Rightarrow |i - j| < p$.

Докажем, что они все ненулевые по модулю p .

Предположим, что $\exists i \mid a \times i \equiv 0 \pmod{p}$.

Тогда $a \times i \vdots p$.

Из этого получаем:

$$a \vdots p \tag{1.3}$$

$$i \vdots p \tag{1.4}$$

Должно выполняться условие 1.3 или 1.4.

Выражение 1.3 неверно по предположению, что $(a; p) = 1$.

Выражение 1.4 неверно, потому что $i < p$.

5. т.к. числа $1, \dots, p-1$ — все ненулевые остатки от деления на p , а $a \times 1, \dots, a \times (p-1)$ все разные по модулю p , то можно сопоставить: $n \equiv a \times m \pmod{p} \mid n, m \in \mathbb{N} \mid n, m < p$.

$$\Rightarrow (a \times 1) \times (a \times 2) \times \dots \times (a \times (p-1)) \equiv 1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \pmod{p}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (a^{p-1} - 1) \times (p-1)! \equiv 0 \pmod{p} \\
&\Rightarrow \underbrace{(p-1)!}_{\neq 0} \times (a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p} \\
&\Rightarrow a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \\
&\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}
\end{aligned}$$

6. т.к. $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ верно, то $a^p \equiv a \pmod{p}$ тоже верно.

□

1.6.3 Теорема Вильсона

Теорема 1.6.3. $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n} \Leftrightarrow n - \text{простое.}$

Доказательство. Пусть $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$. Доказать, что n — простое. Предположим, что n — непростое. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (n-1)! \equiv -1 \pmod{ab} \quad | \quad a, b \in (1, n), a, b \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}_{\text{Содержит } a} = -1 + \underbrace{kn}_{\div a} \quad | \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow 1 \div a
\end{aligned}$$

Получили противоречие. Значит, n — простое. Рассмотрим $(n-1)!$.

Утверждение. $\forall a \in \{1, 2, \dots, n-1\} \exists b \mid a \times b \equiv 1 \pmod{n}$

Доказательство. т.к. n — простое, то $(a; n) = 1$. Тогда по свойству НОД'а:

$$\begin{aligned}
&\exists i, j \in \mathbb{Z} \mid a \times i + n \times j = 1 \\
&\Rightarrow a \times i \equiv 1 \pmod{n}
\end{aligned}$$

□

Утверждение. К каждому числу из множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$ существует только одно число из этого множества, такое, что $a \times b \equiv 1 \pmod{n}$.

Доказательство. Дано число a . Число b обратное к нему по модулю n . Предположим, что существует еще одно число b' , обратное к a по модулю n .

$$\begin{aligned}
&a \times b \equiv 1 \pmod{n}, \quad a \times b' \equiv 1 \pmod{n} \\
&a \times (b - b') \equiv 0 \pmod{n} \\
&a \div n \quad \vee \quad b - b' \div n
\end{aligned}$$

Это не верно, так как $(a; n) = 1$ и $b, b' < n$.

□

Утверждение. Кроме элементов 1 и $p-1$ нету обратных самим себе по модулю n .

Доказательство. Пусть $a \times a \equiv 1 \pmod{n}$. Тогда:

$$\begin{aligned} a^2 &\equiv 1 \pmod{n} \\ a^2 - 1 &\equiv 0 \pmod{n} \\ (a-1)(a+1) &\equiv 0 \pmod{n} \\ \Rightarrow a-1 &\vdots p \quad \vee \quad a+1 \vdots p \\ \Rightarrow a &= 1 \quad \vee \quad a = p-1 \end{aligned}$$

□

Тогда:

$$\begin{aligned} &\left\{ \overbrace{1}^{\equiv 1}, \overbrace{2, 3, \dots}^{\equiv 1}, \underbrace{(n-1)}_{\equiv 1} \right\} \\ \Rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} i &\equiv 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \equiv 1 \times 1^{n-3} \times (-1) \equiv -1 \\ \Rightarrow (n-1)! &\equiv -1 \pmod{n} \end{aligned}$$

□

1.6.4 Другие свойства

Теорема 1.6.4. Если $ab \vdots p, p$ — простое $\Rightarrow (a \vee b) \vdots c$

Доказательство. т.к. $ab \vdots p, p$ — простое, то $(a; p) = p \vee (b; p) = p. \Rightarrow (a \vee b) \vdots p.$ □

Теорема 1.6.5. Существует бесконечное число простых чисел.

Доказательство. Пусть простых чисел — конечное число. Тогда:

$$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$$

Все простые числа. Возьмем число a , такое, что:

$$a = \prod_{i=1}^n p_i + 1$$

Тогда по основной теореме арифметики число a представимо в виде:

$$a = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_k \quad (\text{где } q_1, q_2, \dots, q_k \text{ — простые числа})$$

Допустим, что $q_1 = p_j$, тогда:

$$\underbrace{q_1}_{\vdots p_j} \times q_2 \times \dots \times q_k = p_1 \times p_2 \times \dots \times \underbrace{p_j}_{\vdots p_j} \times \dots \times p_n + 1$$

$$\Rightarrow 1 \vdots p_j$$

$$\Rightarrow \text{Противоречие}$$

$$\Rightarrow q_1, q_2, \dots, q_k \text{ — новые простые числа.}$$

□

1.7 Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.

Do not eat your heart.

Pythagoras

Определение. *НОД* — наибольшее целое число, такое, что $(a : x) \wedge (b : x)$.

Определение. *НОК* — наименьшее целое число, такое, что $(a \mid x) \wedge (b \mid x)$.

1.7.1 Алгоритм Евклида

Для поиска НОД чисел используется алгоритм Евклида.

$$\begin{aligned}
 a &= b \times u_1 & +r_1, \text{ где } r_1 \leq b, r_1 \geq 0 \\
 b &= r_1 \times u_2 & +r_2, \text{ где } r_2 \in [0; r_1] \\
 r_1 &= r_2 \times u_3 & +r_3 \\
 &\dots \\
 r_{n-1} &= r_n \times u_{n+1} & +r_{n+1} \\
 r_n &= r_{n+1} \times u_{n+2}
 \end{aligned}$$

r_{n+1} — НОД $(a; b)$. Надо доказать, что $(a : r_{n+1}) \wedge (b : r_{n+1})$ и что r_{n+1} — наибольший делитель.

Доказательство пункта 1. Доказательство "снизу-вверх".

$$\begin{aligned}
 (r_n = r_{n+1} \times u_{n+2}) &\Rightarrow r_n : r_{n+1} \\
 (r_{n-1} = r_n \times u_{n+1} + r_{n+1}) &\Rightarrow r_{n-1} : r_{n+1} \\
 &\dots \\
 &\Rightarrow b : r_{n+1} \\
 &\Rightarrow a : r_{n+1}
 \end{aligned}$$

□

Доказательство пункта 2. Иными словами, надо доказать, что r_{n+1} делится на любой делитель a и b . Доказательство "сверху-вниз". Пусть $a, b : d$. Тогда:

$$\begin{aligned}
 (r_1 = \underline{a} - \underline{b} \times u_1) &\Rightarrow r_1 : d \\
 (r_2 = \underline{b} - \underline{r_1} \times u_1) &\Rightarrow r_2 : d \\
 (r_3 = \underline{r_1} - \underline{r_2} \times u_1) &\Rightarrow r_2 : d \\
 &\dots \\
 (r_{n+1} = \underline{r_{n-1}} - \underline{r_n} \times u_{n+1}) &\Rightarrow r_{n+1} : d
 \end{aligned}$$

□

1.7.2 Следствия из алгоритма Евклида:**Теорема 1.7.1.**

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z} \exists (a; b) = d) \Rightarrow d = ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}$$

Доказательство.

$$d = r_{n+1} = r_{n-1} - r_n \times u_{n+1} = \dots = \alpha \times a + \beta \times b$$

□

Теорема 1.7.2. $(a_1; \dots; a_n) = d \Rightarrow \exists u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z} \mid d = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

1.8 Диофантовы уравнения

*Cubet autem in duos, aut quadratoquadratum
in duos quadratoquadratos, et generaliter
nullam in infinitum ultra quadratum
potestatem in duos eiusdem nominis fas est
dividere.*

Fermat

1.8.1 Линейные диофантовы уравнения

$$ax + by = c, \quad (\text{где } a, b, c \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{Z})$$

Пусть $(a; b) = d$. Тогда $a = a_1d$, $b = b_1d$, где $(a_1; b_1) = 1$. Тогда уравнение принимает вид:

$$a_1dx + b_1dy = c$$

Если $c \not\vdash d$, то решений нет. Пусть $c \vdash d \Rightarrow c = c_1d$. Уравнение примет вид:

$$a_1dx + b_1dy = c_1d$$

$$a_1x + b_1y = c_1$$

Тогда можно считать, что $(a; b) = d$. Надо решить уравнение $ax + by = c$. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение уравнения. Оно всегда существует. т.к. $(a; b) = 1 \Rightarrow 1 = au + bv \Rightarrow c = acu + bcu$. Тогда:

$$\begin{aligned} & - \begin{cases} ax + by = c \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases} \\ & a(x - x_0) = -b(y - y_0) \\ \Rightarrow & x - x_0 \vdash b \Rightarrow x - x_0 = bt, t \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & y - y_0 = -at \end{aligned}$$

Итого,

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1.8.2 Уравнение Пелля

Определение. Уравнением Пелля называется уравнение вида $x^2 - Ay^2 = 1$, где $A \geq 0 \wedge A \neq a^2, \forall a \in \mathbb{N}$.

Если $A = a^2$, то:

$$\begin{aligned} & (x - ay)(x + ay) = 1 \\ & \frac{1}{x + ay} = x - ay \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 1 + ay \\ x = 1 - ay \\ x = -1 + ay \\ x = -1 - ay \end{cases} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Утверждение. $\exists x_1, y_1 > 0$, удовлетворяющие равенству (доказательство сложное).

Теорема 1.8.1. Если $(x_1; y_1)$ — минимальное положительное решение, то $(x_1 + y_1\sqrt{A})^n = x_n + y_n\sqrt{A}$, где $(x_n; y_n)$ — n -ое решение. И все положительные решения уравнения совпадают с одной из пар $(x_n; y_n)$.

Доказательство.

Утверждение. Если $(u; v), (s; t)$ — решения уравнения и $u < s$, то $v < t$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} u^2 - Av^2 &= 1 \\ s^2 - At^2 &= 1 \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{u^2 - 1}{A} \wedge t^2 = \frac{s^2 - 1}{A} \end{aligned}$$

Далее очевидно. □

Пусть $\exists (u; v)$ — положительное решение, не совпадающее ни с одной из пар $(x_n; y_n)$. Тогда можно считать, что $x_n < u < x_{n+1}$ и $y_n < v < y_{n+1}$. Имеем:

$$\begin{aligned} x_n^2 - Ay_n^2 &= 1 \\ x_{n+1}^2 - Ay_{n+1}^2 &= 1 \\ u^2 - Av^2 &= 1 \end{aligned}$$

Также известно, что $(x_1 + y_1\sqrt{A})(x_n + y_n\sqrt{A}) = x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{A}$. Запишем в виде двойного неравенства положение пары $(u; v)$:

$$x_n + y_n\sqrt{A} < u + v\sqrt{A} < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{A}$$

Домножим неравенство на $(x_n - y_n\sqrt{A})$.

$$\begin{aligned} \underbrace{x_n^2 - Ay_n^2}_{=1} &< (u + v\sqrt{A})(x_n - y_n\sqrt{A}) < (x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{A})(x_n - y_n\sqrt{A}) \\ 1 &< x_nu - y_nu\sqrt{A} + x_nv\sqrt{A} - y_nvA < \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})(x_n + y_n\sqrt{A})}{(x_n + y_n\sqrt{A})} \\ 1 &< (x_nu - y_nvA) + (x_nv - y_nu)\sqrt{A} < x_1 + y_1\sqrt{A} \end{aligned}$$

Надо оценить выражения, стоящие в скобках в средней части. Оценим $x_nu - y_nvA$:

$$\begin{cases} u^2 - Av^2 = 1 \\ x_n^2 - Ay_n^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{1 + Av^2} \\ x_n = \sqrt{1 + Ay_n^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_nu &\vee y_nvA \\ \sqrt{(1 + Av^2)(1 + Ay_n^2)} &\vee y_nvA \\ \sqrt{1 + A(v^2 + y_n^2) + y_n^2v^2A^2} &\vee y_nvA \\ \sqrt{1 + A(v^2 + y_n^2) + (y_nvA)^2} &> y_nvA \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x_n u - y_n v A) > 0.$$

Оценим $x_n v - y_n u$: $x_n v - y_n u = \sqrt{1 + A y_n^2} v - y_n \sqrt{1 + A v^2}$.

$$\begin{array}{rcl} v \sqrt{1 + A y_n^2} & \vee & y_n \sqrt{1 + A v^2} \\ v^2 (1 + A y_n^2) & \vee & y_n^2 (1 + A v^2) \\ v^2 + A y_n^2 v^2 & \vee & y_n^2 + A y_n^2 v^2 \\ v^2 & \vee & y_n^2 \\ v^2 & > & y_n^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x_n v - y_n v) > 0.$$

Мы нашли пару, удовлетворяющую условию, но меньше минимальной $(x_1; y_1)$. Противоречие. Значит, такой пары $(u; v)$ существовать не может, а значит нет больше других положительных решений. $\square$

1.9 Теорема и функция Эйлера

*Madam, I have come from a country where
people are hanged if they talk.*

Leonhard Euler

1.9.1 Функция Эйлера

Определение. Функция Эйлера ($\varphi(n)$) — количество чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

Пример. $\varphi(5) = 4 - \{1, 2, 3, 4\}$, $\varphi(20) = 8 - \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$,

Если p — простое, то:

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= p - 1 \\ \varphi(p^2) &= p^2 - p \\ \varphi(p^3) &= p^3 - p^2 \\ &\dots \\ \varphi(p^i) &= p^i - p^{i-1}, \quad i \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Также:

$$\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n), \quad \text{при } (m; n) = 1$$

1.9.2 Теорема Эйлера

Теорема 1.9.1. Если $(a; n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Доказательство. Выпишем все числа, меньшие n и взаимно простые с ним:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\varphi(n)}\}$$

Домножим каждый из элементов множества A на a :

$$A' = \{a \times \alpha_1, a \times \alpha_2, a \times \alpha_3, \dots, a \times \alpha_{\varphi(n)}\}$$

Каждый из них не сравним с n по модулю n , взаимнопрост с n и все они разные по модулю n (аналогично малой теореме Ферма 1.6.2). Тогда:

$$(a \times \alpha_1) \times (a \times \alpha_2) \times (a \times \alpha_3) \times \dots \times (a \times \alpha_{\varphi(n)}) \equiv \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \dots \times \alpha_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

$$a^{\varphi(n)} \times \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \alpha_i \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \alpha_i \pmod{n}$$

$$a^{\varphi(n)} \times \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \alpha_i - \prod_{i=1}^{\varphi(n)} \alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{\varphi(n)} \alpha_i \right)}_{(\forall \alpha_i \in A \Rightarrow (\alpha_i; n)=1)} \times (a^{\varphi(n)} - 1) \equiv 0 \pmod{n} \\
& \Rightarrow a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n} \\
& \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}
\end{aligned}$$

□

1.9.3 Мультипликативность функции Эйлера

Теорема 1.9.2. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, при $(m; n) = 1$.

Доказательство. Возьмем множество A из взаимнопростых с mn элементов, меньших mn . Также возьмем множества B и C , аналогичные для m и n .

$$A = \{a \mid (a; mn) = 1; a < mn\}; |A| = \varphi(mn)$$

$$B = \{b \mid (b; m) = 1; b < m\}; |B| = \varphi(m)$$

$$C = \{c \mid (c; n) = 1; c < n\}; |C| = \varphi(n)$$

Если мы докажем, что между множеством A и множествами B и C существует взаимнооднозначное соответствие, то мультипликативность будет доказана. При этом каждый элемент из A будет иметь образ в B и C .

$$a_n \rightarrow (b_i \in B; c_j \in C)$$

$$a_n \rightarrow (a_n \bmod m; a_n \bmod n)$$

Почему $a_i \bmod m \in B$? Пусть $(a_i \bmod m = x) \Rightarrow a_i \equiv x \pmod{m}$. Надо доказать, что $x \in B$, т.е. $(x; m) = 1$. Предположим, что $(x; p) \wedge (m; p) \Rightarrow a_i \bmod m : p$. Знаем, что $(a_i - x; m) \Rightarrow (a_i = km + x, m \in \mathbb{Z})$. $m : p$ и $x : p$ (см. выше). Значит, $a_i : p$. Тогда $(a_i; mn) \geq p \neq 1$. Противоречие.

Почему $a_i \bmod n \in C$? Аналогично первому пункту.

Почему разные элементы отображаются в разные элементы? Предположим, что

$$c \bmod m = c' \bmod n$$

Тогда $(c - c' : m) \wedge (c - c' : n)$. Тогда, т.к. m и n взаимнопростые, $c - c' : mn$. Но этого не может быть, т.к. они $c, c' < mn$.

Почему $(b_i; c_j)$ является образом a_n ? Возьмем такой $x \in \{0, 1, 2, \dots, mn - 1\}$, что

$$\begin{cases} x \equiv b_i \pmod{m} \\ x \equiv c_j \pmod{n} \end{cases}$$

Такой x в данном промежутке всегда можно взять (по китайской теореме об остатках). Докажем, что $x \in A$. Пусть $x \notin A$. Тогда $(x; mn) \neq 1$. Тогда $\exists p \mid (x; p) \wedge (mn; p) \wedge p$ — простое. т.к. $mn : p$, то $(m \vee n) : p$. Также, т.к. $x \equiv b_i \pmod{m}$, то $x - b_i = km, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b_i = x - km \Rightarrow b_i : p$, т.к. $x : p$ и $km : p$. Значит, $(b_i; m) \neq 1$. Противоречие. Значит, $x \in A$.

Таким образом, каждому элементу из A взаимно однозначно соответствует элемент из B и C . $\square$

2 10 класс. II полугодие

Вопросы к экзамену за 2 полугодие 10 класса

1. Определение производной. Связь дифференцируемости с непрерывностью
2. Производная суммы, произведения, частного
3. Геометрический смысл производной
4. Производные функций x^n , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$
5. Непрерывность сложной функции
6. Производная сложной функции
7. Свойства функций, непрерывных на отрезке (1-я и 2-я теоремы Вейрштрасса)
8. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции
9. Непрерывность обратной функции
10. Асимптоты
11. Производная обратной функции
12. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши
13. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума: теорема Ферма
14. Связь производной с монотонностью функции. Достаточное условие экстремума
15. Правило Лопиталя
16. Формула Тейлора
17. Иррациональность числа e
18. Алгебраические операции. Единицы, нули. Гомоморфизм, изоморфизм
19. Группы. Простейшие следствия из аксиом группы
20. Группа подстановок. Разложение подстановки в произведение независимых циклов
21. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Чётные и нечётные подстановки
22. Порядок элемента группы и его свойства

2.1 Пределы числовых последовательностей

If I have seen further than others, it is by standing upon the shoulders of giants.

Isaac Newton

2.1.1 Определение числовой последовательности. Ограниченность.

Определение. Числовая последовательность — отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначается (a_n)

(a_n)	называется возрастающей,	если	$\forall n \in \mathbb{N}$	$a_n < a_{n+1}$
(a_n)	называется убывающей,	если	$\forall n \in \mathbb{N}$	$a_n > a_{n+1}$
(a_n)	называется невозрастающей,	если	$\forall n \in \mathbb{N}$	$a_n \leq a_{n+1}$
(a_n)	называется неубывающей,	если	$\forall n \in \mathbb{N}$	$a_n \geq a_{n+1}$

(a_n)	называется ограниченной сверху,	если	$\exists M$	$\forall n$	$a_n \leq M$
(a_n)	называется ограниченной снизу,	если	$\exists M$	$\forall n$	$a_n \geq M$

(a_n)	называется ограниченной,	если	$\exists M_1, M_2$	$\forall n$	$M_1 \leq a_n \leq M_2$
---------	--------------------------	------	--------------------	-------------	-------------------------

Теорема 2.1.1. Последовательность (a_n) ограниченная $\Leftrightarrow \exists M \forall n |a_n| \leq M$

Доказательство ($\Rightarrow$).

$$|a_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq a_n \leq M$$

Последовательность ограничена по определению. □

Доказательство ($\Leftarrow$). Последовательность (a_n) — ограниченная. Тогда

$$\exists M_1, M_2 \forall n M_1 \leq a_n \leq M_2.$$

Пусть

$$M = \max(|M_1|, |M_2|), M \geq 0$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \begin{cases} M \geq |M_1| \\ M \geq |M_2| \end{cases} \\ & \Downarrow \\ & \begin{cases} a_n \leq M_2 \leq |M_2| \leq M \\ -a_n \leq -M_1 \leq |M_1| \leq M \end{cases} \\ & \Updownarrow \\ & |a_n| \leq M \end{aligned}$$

□

Определение. Окрестность точки a (ε -окрестность) — $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Определение. Пределом числовой последовательности (a_n) называется такое число a , удовлетворяющее условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

То есть для доказательства, что число a является пределом последовательности (a_n) необходимо указать функцию $N(\varepsilon)$, возвращающую натуральное число N , для которого справедливо, что для $\forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$ при заданном ε

Пример. Для последовательности, n -ый член которой $a_n = \frac{n}{2n+1}$ $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1$

2.1.2 Свойства пределов числовых последовательностей

Теорема 2.1.2.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists M_1, M_2 \quad \forall n \quad M_1 \leq a_n \leq M_2$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N \quad -\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon \\ a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} M_1 &= \min(\min(a_1, \dots, a_{n-1}), a) \\ M_2 &= \max(\max(a_1, \dots, a_{n-1}), a) \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall n \quad M_1 \leq a_n \leq M_2$$

□

Теорема 2.1.3. Если существует a , такое что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то такое a единственно.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Пусть

$$M = \max(N_1, N_2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |a_n - a| + |a_n - b| &< \varepsilon \\ |a_n - a| + |a_n - b| &\geq |a - b| \\ |a - b| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Противоречие с тем, что ε — любое

□

2.1.3 Бесконечно малые последовательности

Определение. (α_n) — бесконечно малая последовательность, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

Теорема 2.1.4. $\sum_i^\infty \alpha_{i_n} = \beta_n$, где α_{i_n}, β_n — бесконечно малые последовательности.

Доказательство.

$$\alpha_{i_n}: \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_i(\varepsilon) \quad \forall n \geq N_i \quad |\alpha_{i_n}| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$N = \max(N_i)$$

↓

$$|\alpha_{1_n} + \alpha_{2_n}| \leq |\alpha_{1_n}| + |\alpha_{2_n}| < \varepsilon$$

↓

β_n — бесконечно малая последовательность

□

Теорема 2.1.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n b_n| = 0$, где b_n — ограниченная последовательность.

Доказательство.

$$|\alpha_n b_n| = |\alpha_n| \times |b_n| < \varepsilon \times M$$

□

Теорема 2.1.6. Произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Воспользуемся теоремами 2.1.2 и 2.1.5 (одну из бесконечно малых последовательностей можно рассматривать как ограниченную). □

Утверждение. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow a_n = A + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая.

2.1.4 Бесконечно большие последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists N(M) \quad \forall n \geq N \quad |a_n| > M$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= +\infty & \Leftrightarrow & \quad \forall M > 0 \quad \exists N(M) \quad \forall n \geq N \quad a_n > M \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= -\infty & \Leftrightarrow & \quad \forall M > 0 \quad \exists N(M) \quad \forall n \geq N \quad a_n < -M \end{aligned}$$

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \times n = \infty, \quad (N(M) = [M] + 1)$$

2.1.5 Теоремы о сумме, произведении и частном пределов

Пусть:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

$$a_n = a + \alpha_n$$

$$b_n = b + \beta_n$$

Теорема 2.1.7.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = \max(N_1, N_2) \quad \forall n \geq M \quad |(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$$

□

Теорема 2.1.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n - ab| \leq \\ &\leq |b\alpha_n| + |a\beta_n| + |\alpha_n \beta_n| < \varepsilon \underbrace{(|a| + |b|)}_{const} + \varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема 2.1.9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

Доказательство.

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} \right| < \frac{2|\alpha_n b - a\beta_n|}{b^2} \leq \frac{2}{b^2} (|\alpha_n b| + |a\beta_n|) < \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{2(|a| + |b|)}{b^2}}_{const}$$

□

2.2 Пределы функций

*It is not enough to have a good mind; the
main thing is to use it well.*

Rene Descartes

2.2.1 Пределы функций в точке

Пусть $f(x)$ — функция, определённая в проколотой окрестности точки a :

$$\begin{aligned} U(a) &= (a - \eta; a + \eta) \\ \dot{U}(a) &= U(a) \setminus a \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall U(A) \quad \exists \dot{U}(a) \quad f(\dot{U}(a)) \subseteq U(A)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Пример. Для функции $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$, $\delta(\varepsilon) = \sqrt{9 - |\varepsilon|} - 3$

Когда x стремится к точке справа (слева), вводится понятие "предел справа" ("предел слева"). Это делается тогда, когда $f(x)$ определена не во всей U_ε . (например для функции $\sqrt{x}$ в окрестности точки 0).

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

2.2.2 Пределы функций на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x: \quad x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x: \quad x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x: \quad |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

2.2.3 Бесконечные пределы

Выражение $\lim f(x) = \infty$ означает, что предел функции не существует и функция безгранично возрастает (убывает). Но условно можно считать, что в таком случае предел равен бесконечности. Рассмотрим один из возможных случаев.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M$$

Аналогично рассматриваются и другие случаи. Например:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall x: \quad |x| > \Delta \Rightarrow f(x) < M$$

2.2.4 Теоремы о сумме, произведении и частном пределов

Пусть:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = y_2$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |x - a| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - y_1| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |x - a| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - y_2| < \varepsilon \\ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

Теорема 2.2.1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = y_1 + y_2$$

Доказательство.

$$|f(x) + g(x) - (y_1 + y_2)| \leq |f(x) - y_1| + |g(x) - y_2| < 2\varepsilon$$

□

Теорема 2.2.2.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = y_1y_2$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - y_1y_2| &= |f(x)g(x) - y_1y_2 + y_2f(x) - y_2f(x)| = \\ &= |f(x)(g(x) - y_2) + y_2(f(x) - y_1)| < \varepsilon|f(x)| + \varepsilon|y_2| \leq \varepsilon(\varepsilon + |y_1|) + \varepsilon|y_2| < \\ &< \varepsilon(1 + |y_1| + |y_2|) = \varepsilon' \end{aligned}$$

□

Теорема 2.2.3.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2}, \quad y_2 \neq 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{y_1}{y_2} \right| &= \left| \frac{f(x) \times y_2 - g(x) \times y_1}{g(x) \times y_2} \right| = \\ &= \left| \frac{(f(x) \times y_2 - y_1y_2) - (g(x) \times y_1 - y_1y_2)}{g(x) \times y_2} \right| < \frac{\varepsilon(|y_1| + |y_2|)}{(\varepsilon + y_2)|y_2|} < \varepsilon \frac{|y_1| + |y_2|}{y_2^2} = \varepsilon' \end{aligned}$$

□

2.3 Непрерывность функций

Silence is better than unmeaning words.

Pythagoras

2.3.1 Определение непрерывности функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Тогда $f(x)$ будет непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Определение на ε -языке будет выглядеть следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Пример. $f(x) = \sin x$ непрерывна в любой точке x_0 числовой прямой.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| < \varepsilon$$

$\Uparrow$

$$\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Uparrow$

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

□

2.3.2 Теоремы о сумме, произведении и частном непрерывных функций

Теорема 2.3.1. Если $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .

Доказательство. Воспользуемся соответствующими теоремами в пункте 2.2.4. □

2.3.3 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\mathbb{F}$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathbb{F}$.

Теорема 2.3.2. Если $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x: \quad |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x: \quad |y - y_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon_2$$

Берём $\varepsilon_1 = \delta_2$, подбираем по этим значениям δ_1 .

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(x_0)| < \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad |f(y) - f(y_0)| = |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon_2$$

□

Теорема 2.3.3. Если f непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a; b]$, то f^{-1} непрерывна на отрезке $[f(a); f(b)]$.

Доказательство. Если функция f строго монотонна на отрезке $[a; b]$, то $\exists f^{-1}$, определённая на отрезке $[f(a); f(b)]$ (будем считать, что f строго возрастает на этом отрезке). Если $g = f^{-1}$ непрерывна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y: \quad |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Пусть

$$f(x_0 - \varepsilon) = y_1, \quad f(x_0 + \varepsilon) = y_2$$

$$\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$$

Тогда

$$y_1 < y < y_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon$$

Из этого следует, что

$$|y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad y_1 < y < y_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |g(y) - x_0| = |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

□

Теорема 2.3.4 (Вейрштрасс-1). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.

$$\exists C \quad \forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leq C$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ неограничена. Возьмем отрезок $\Delta_1 = [a; b]$. Делим отрезок пополам. Тогда $f(x)$ неограничена на одной из половин. Обозначим ее за Δ_2 . Возьмем половину отрезка Δ_2 , на которой функция неограничена и обозначим за Δ_3 , и так далее. Получим последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$. Тогда $\forall i \quad \exists \xi \in \Delta_i$. Пусть

$$\Delta_i = [a_i; b_i], \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq \xi, \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq \xi$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

Докажем теперь, что $\alpha = \beta = \xi$. $0 \leq \xi - \alpha \leq \beta - \alpha$. Если $\xi \neq \alpha$, то $\forall n \quad b_n - a_n \geq \xi - \alpha$. Причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$, для $n > 2$. Отсюда следует, что $b_n - a_n \rightarrow 0$. Но $b_n - a_n \geq \xi - \alpha$. Противоречие. Значит, $\xi = \alpha$. Аналогично, $\xi = \beta$. Тогда $f(a_n) \rightarrow f(\xi)$, так как $f(x)$ — непрерывная функция. Распишем, что значит "f непрерывна в точке ξ ":

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U_\delta(\xi) \quad |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{при } x \in U_\delta(\xi)$$

Поэтому можно сказать, что $f(x) \rightarrow f(\xi)$ при $x \rightarrow \xi$. Также, так как $a_n \rightarrow \xi$ и $b_n \rightarrow \xi$, то $\exists [a_k; b_k] \subset U_\delta(\xi) \Rightarrow \Delta_k \subset U_\delta(\xi)$. Тогда $f(\xi) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(\xi) + \varepsilon$. Тогда $f(x)$ ограничена на $U_\delta(\xi)$. Тогда $f(x)$ ограничена на Δ_k . Противоречие. □

Теорема 2.3.5 (Вейрштрасс-2). *Функция, непрерывная на отрезке, имеет максимум и минимум.*

$$\exists x_1: f(x_1) \geq f(x) \quad \forall x \in [a; b], \quad x \neq x_1$$

$$\exists x_2: f(x_2) \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b], \quad x \neq x_2$$

Доказательство. Из первой теоремы Вейрштрасса следует, что существуют супремум и инфимум этой функции на отрезке $[a; b]$:

$$\exists \sup_{[a; b]} f(x) = m, \quad \exists \inf_{[a; b]} f(x) = n$$

Докажем теперь, что функция достигает и супремума, и инфимума. Пусть $f(x) \neq m, \forall x \in [a; b]$. Тогда:

$$f(x) < m, \quad \forall x \in [a; b]$$

$$m - f(x) > 0, \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\exists g(x) = \frac{1}{m - f(x)}, \quad [a; b] \subset D_g, \quad g \text{ непрерывна на } [a; b]$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a; b] \quad g(x) \leq c \quad (\text{по первой теореме Вейрштрасса, 2.3.4})$$

$$m - f(x) \geq \frac{1}{c}$$

$$f(x) \leq \underbrace{m - \frac{1}{c}}_{const}$$

Значит, m — не супремум функции. Аналогичное доказательство для инфимума. $\square$

Теорема 2.3.6 (Коши; о промежуточном значении функции). *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и если $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, то $\forall \gamma \in [\alpha; \beta] \quad \exists \xi \in [a; b] \quad f(\xi) = \gamma$.*

Доказательство. Возьмем функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. Надо доказать, что $\exists \xi: g(\xi) = 0$. Построим последовательность вложенных отрезков.

$$\Delta_1 = [a_1; b_1], \quad a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad g(a_1) < 0, \quad g(b_1) > 0$$

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_k, \quad \Delta_k = [a_k; b_k], \quad g(a_k) < 0, \quad g(b_k) > 0$$

По принципу вложенных отрезков:

$$\exists \xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k$$

Причем $a_n \rightarrow \xi$, $b_n \rightarrow \xi$. Надо доказать, что $g(\xi) = 0$. Пусть $g(\xi) > 0$. Тогда в δ -окрестности точки ξ : $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$, при $|x - \xi| < \delta$. Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{2}g(\xi)$. Тогда:

$$\underbrace{g(\xi) - \varepsilon}_{>0} \leq g(x) \leq \underbrace{g(\xi) + \varepsilon}_{>0}, \quad \forall x \in U_\delta(\xi)$$

Но $a_n \rightarrow \xi \Rightarrow \exists k: a_k \in U_\delta(\xi)$. Следовательно, $g(a_k) < 0$. Но $g(a_k) > 0$ по предположению, что для $\varepsilon < \frac{1}{2}g(\xi)$, $g(\xi) - \varepsilon > 0$. Получили противоречие, а значит $g(\xi)$ не может быть больше нуля. Аналогично доказывается, что $g(\xi)$ не может быть меньше нуля. Таким образом, получаем, что $g(\xi) = 0$. Теорема доказана. $\square$

2.3.4 Теорема о непрерывности элементарных функций

Определение. Функция, получающаяся из функций const , a^x , $\sin x$ с помощью четырёх арифметических действий, их суперпозиций и обратных функций, называется *элементарной функцией*.

Замечание. $x^a = e^{a \ln x}$, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ и т. п.

Теорема 2.3.7. Любая элементарная функция непрерывна в любой точке своего определения

Доказательство. Для доказательства этой теоремы необходимо проверить следующие утверждения:

1. Проверить непрерывность простейших функций.
2. Проверить непрерывность функций, образующихся в результате арифметических действий.
См. пункт 2.3.2
3. Проверить непрерывность сложной функции.
См. теорему 2.3.2
4. Проверить непрерывность обратной функции.
См. теорему 2.3.3

□

2.3.5 Асимптоты

Определение. Вертикальной асимптотой $x = a$ для функции $f(x)$ называется тогда и только тогда, когда:

$$x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Определение. Наклонной асимптотой $y = kx + b$ для функции $f(x)$ называется тогда и только тогда, когда:

$$y = kx + b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

Теорема 2.3.8. Наклонная асимптота существует тогда и только тогда, когда

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \exists \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$$

Доказательство. (Необходимость) Дано, что существует асимптота. Значит существует следующий предел по определению:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

Из него следуют следующие соотношения:

1.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

2.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

□

Доказательство. (Достаточность) Дано, что существуют пределы k и b . Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(f(x) - kx) - b] = \lim_{x \rightarrow \infty} [b - b] = 0$$

□

2.4 Производная функции

The reading of all good books is like a conversation with the finest minds of past centuries.

Rene Descartes

2.4.1 Определение производной функции

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 .

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Пример. $f(x) = 5x + 17$. Найти $f'(x)$.

Решение.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x + 5\Delta x + 17 - 5x - 17}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5 = 5$$

2.4.2 Связь дифференцируемости с непрерывностью

Теорема 2.4.1. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой же точке.

Доказательство. Пусть $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a$.

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow a \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} - a = \alpha(\Delta x) \quad (\text{где } \alpha(\Delta x) \text{ — бесконечно малая})$$

$$(\alpha(\Delta x))(\Delta x) = \Delta f - a\Delta x \Rightarrow \Delta f = (\alpha(\Delta x))(\Delta x) + a\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\alpha(\Delta x))(\Delta x) + a\Delta x] = 0$$

□

2.4.3 Теоремы о сумме, произведении и частном производных функций

Теорема 2.4.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то $\exists (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

□

Теорема 2.4.3. Если f и g дифференцируемы в точке x_0 , то $\exists (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции (fg) :

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = \\ &= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = \\ &= \Delta f \Delta g + (\Delta f)g(x) + (\Delta g)f(x)\end{aligned}$$

Теперь найдем производную (fg) в точке $x = x_0$:

$$\begin{aligned}(fg)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \Delta g + (\Delta f)g(x) + (\Delta g)f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta g}{\Delta x} \Delta x \right] + f'g + fg' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'g' \Delta x] + f'g + fg' = f'g + fg'\end{aligned}$$

□

Теорема 2.4.4. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 ($g(x_0) \neq 0$), то $\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции $\frac{f}{g}$:

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f}{g}(x + \Delta x) - \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x) + \Delta f}{g(x) + \Delta g} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{g(x)\Delta g + g^2(x)}$$

Теперь найдем производную $\left(\frac{f}{g}\right)$ в точке $x = x_0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x)\Delta f - f(x)\Delta g}{\Delta x(g(x) + \Delta g)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'g - fg'}{g(g + \Delta g)} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Последний переход обусловлен непрерывностью функции $g(x)$ (см. 2.4.2)

□

2.4.4 Геометрический смысл производной. Уравнение касательной.

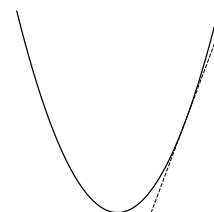
Определение. Касательной к данной кривой в точке A называется предельное положение секущей AA_1 где $A_1 \rightarrow A$.

Коэффициент наклона секущей: $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Соответственно, при $x \rightarrow x_0$, $k = f'(x_0)$. Значит, коэффициент наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке.

Выведем уравнение касательной:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + k(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Определение. Углом между кривыми называется угол между касательными в точке пересечения кривых.

2.4.5 Производные основных функций

$f(x)$	x^r	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$
$f'(x)$	rx^{r-1}	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Производная x^n .

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1} \end{aligned}$$

□

Производная $\frac{1}{x}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

□

Производная $\sin x$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\Delta x} \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x}_{=1} + \cos x \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{=1} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\Delta x} = \cos x \end{aligned}$$

□

Производная $\cos x$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\Delta x} \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x}_{=1} - \sin x \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{=1} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\Delta x} = -\sin x \end{aligned}$$

□

Производная $\operatorname{tg} x$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

□

Производная $\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

□

2.4.6 Производная сложной и обратной функции

Теорема 2.4.5. Если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , $f(x)$ дифференцируема в точке $g(x_0)$, то функция $F = f(g(x))$ также дифференцируема в точке x_0 , и $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Доказательство. Пусть $y_0 = g(x_0)$, $f'(y_0) = A$, $g'(x_0) = B$. Тогда по определению:

$$\frac{\Delta f}{\Delta y} = A + \alpha(\Delta y), \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} = B + \beta(\Delta x),$$

(где $\alpha(\Delta y)$, $\beta(\Delta x)$ — бесконечно малые при $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ соответственно).

Тогда:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} = \frac{f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta F = f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)$$

Здесь $y_0 = g(x_0)$, $\Delta y = \Delta g$. Тогда из равенств выше получаем:

$$\Delta F = (A + \alpha(\Delta y))\Delta y = (A + \alpha(\Delta y))(B + \beta(\Delta x))\Delta x$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = AB + A\beta(\Delta x) + B\alpha(\Delta y) + \alpha(\Delta y)\beta(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = AB = f'(g(x))g'(x)$$

В силу дифференцируемости функций f и g , они непрерывны, а значит $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$. □

Теорема 2.4.6. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , $f'(x_0) \neq 0$, $f(x_0)$ строго монотонна в окрестности точки x_0 , тогда функция $g = f^{-1}$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство.

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{(y_0 + \Delta y) - (y_0)} = \frac{(x_0 + \Delta x) - (x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Переход $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$ осуществляется следующим образом:

$$g(y_0 + \Delta y) = g(f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = g(f(x_0 + \Delta x)) = x_0 + \Delta x$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

2.4.7 Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 2.4.7 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда:

$$\exists \xi \in (a; b): f'(\xi) = 0$$

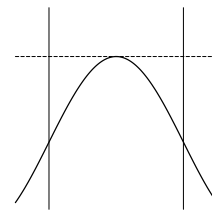
Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то у нее есть наибольшее и наименьшее значение на данном отрезке (См. 2.3.5).

То есть:

$$\exists \zeta_1: f(\zeta_1) \geq f(x) \quad \forall x \in [a; b], \quad x \neq \zeta_1$$

$$\exists \zeta_2: f(\zeta_2) \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b], \quad x \neq \zeta_2$$

Если $f(\zeta_1) = f(\zeta_2)$, то $f(x) = \text{const}$, а значит $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Если $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$, то тогда либо $\zeta_1 \in (a; b)$, либо $\zeta_2 \in (a; b)$. Значит, это внутренняя точка экстремума и производная в ней, по теореме Ферма, равна нулю. $\square$



Теорема 2.4.8 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда:

$$\exists \xi \in (a; b): f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Доказательство. Введем функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, такую, что $F(a) = F(b)$. Найдем λ :

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

По теореме Ролля (2.4.7):

$$\exists \xi \in (a; b): F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$

Теорема 2.4.9 (Коши). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$, а $g(x)$ — строго монотонна. Тогда:

$$\exists \xi \in (a; b): \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Доказательство. Введем функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, такую, что $F(a) = F(b)$. Найдем λ :

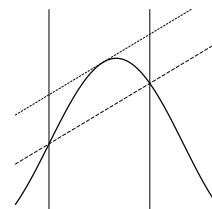
$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - f(b) = \lambda(g(a) - g(b))$$

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

По теореме Ролля (2.4.7):

$$\exists \xi \in (a; b): F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda g'(\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$\square$



2.4.8 Экстремум функции. Необходимое условие экстремума

Определение. Экстремумом функции называется ее максимум или минимум.

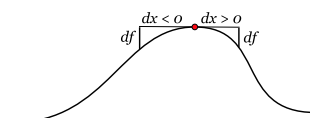
Определение. x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если:

$$\exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta(x_0) \quad f(x_0) > f(x), \quad x \neq x_0$$

x_0 называется *точкой глобального максимума* функции $f(x)$, если:

$$\forall x \in D_f \quad f(x_0) > f(x), \quad x \neq x_0$$

Теорема 2.4.10 (Ферма; необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка экстремума и $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.



Доказательство. Доказательство проведем для максимума. Для минимума доказательство аналогичное. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в окрестности точки x_0 .

1. Пусть $\Delta x > 0$, тогда $\Delta y < 0$. Значит:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$$

2. Пусть $\Delta x < 0$, тогда $\Delta y < 0$ (тоже). Значит:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

Из данных соотношений получаем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\leq 0 \wedge \geq 0}$

□

Замечание. Если понимать экстремум в нестрогом смысле, то утверждение сохраняется.

Замечание. Из того, что x_0 — точка экстремума следует, что $f'(x_0) = 0$. Но из того, что $f'(x_0) = 0$ не следует, что x_0 — точка экстремума. Простейший пример — $f(x) = x^3$. При $x = 0$ производная равна нулю, однако эта точка не является экстремумом.

Определение. Точка, в которой производная не существует или равна нулю, называется *критической*.

2.4.9 Связь производной с монотонностью. Достаточное условие экстремума

Теорема 2.4.11. Если $f(x)$ строго возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$ и дифференцируема на нем, то $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a; b)$ ($f'(x) \leq 0$).

Доказательство.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Проведем доказательство для строго возрастающей функции, так как доказательство для строго убывающей функции аналогично.

1. Если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ (так как функция возрастает), а значит $f'(x) > 0$ (из определения; см. выше).
2. Если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) < f(x)$, а значит $f'(x) < 0$.

□

Теорема 2.4.12. Если функция $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a; b)$, то $f(x)$ строго возрастает (убывает) на $(a; b)$.

Доказательство. Проведем доказательство для $f'(x) > 0$, т.к. доказательство для $f'(x) < 0$ аналогично. Иными словами нужно доказать импликацию: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Возьмем произвольные точки x_1, x_2 на данном отрезке так, что $x_1 > x_2$. Тогда по теореме Лагранжа (2.4.8):

$$\exists \xi \in (a; b): f'(\xi)(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$

Рассмотрим это равенство. $f'(\xi) > 0$ по условию ($\xi \in (x_1; x_2)$), $x_1 > x_2$ по предположению. Значит, левая часть положительна. Так как равенство верно, то и правая часть положительна, а значит $f(x_1) > f(x_2)$. □

Утверждение (Достаточное условие экстремума). Если в некоторой точке x_0 производная равна нулю, а при прохождении через эту точку знак производной меняется, то x_0 — точка экстремума.

2.4.10 Правило Лопиталья

Теорема 2.4.13 (I). Если функция $f(x)$ дифференцируема в $\dot{U}_\delta(a)$ и непрерывна в $U_\delta(a)$, а при $x \rightarrow a$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ образует неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то если существует предел отношения их производных, то существует и предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Так как при $x \rightarrow a$ функции $f(x), g(x)$ стремятся к 0 и они непрерывны в окрестности точки a , то можно считать, что функции в точке a принимают значение 0. Тогда по теореме Коши (2.4.9):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(где ξ между a и x). Тогда:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Теорема 2.4.14 (II). Если функция $f(x)$ дифференцируема для достаточно больших x , а при $x \rightarrow \infty$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ образует неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то если существует предел отношения производных при $x \rightarrow \infty$, то существует и предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Рассмотрим следующий предел для $y = \frac{1}{x}$ (тогда $y \rightarrow 0$; преобразования по правилу Лопиталя-I):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{y}\right)'}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{y}\right)'} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Теорема 2.4.15 (III). Если функция $f(x)$ дифференцируема в $\dot{U}_\delta(a)$, а при $x \rightarrow a$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ образует неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то если существует предел отношения их производных, то существует и предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство. Пусть:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| < \varepsilon, \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta$$

Зафиксируем число x_0 , для которого подобраны параметры ε и δ . Тогда рассмотрим отношение функций:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{g(x) - g(x_0) + g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}} = \frac{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}$$

Точка ξ по теореме Коши (2.4.9) лежит между a и x_0 . Поэтому при $x \rightarrow a$ дробь $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к α . Дробь $\frac{f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ стремится к нулю при $x \rightarrow a$, так как $g(x_0)$ — константа (x_0 фиксирован). Аналогично $\frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ стремится к нулю. Получаем, что для $x \rightarrow a$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \alpha$$

□

2.4.11 Введение в анализ бесконечно малых. Формула Тейлора

Введение в анализ бесконечно малых.

Определение. Величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$.

Определение. Если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

То величины α и β называются *эквивалентными величинами*.

Определение. Если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} \neq 0, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$$

То величины α и β называются *величинами одного порядка*. Аналогично, если:

$$\exists \gamma = \text{const}: |\alpha| \leq \gamma |\beta|$$

Определение. Если:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$$

То величина α является *величиной более высокого порядка*, чем β . Аналогично, если:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \infty \right) \Leftrightarrow \alpha = o(\beta)$$

Формула Тейлора. Рассмотрим приращение функции, выраженное через ее производную:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(a) + \alpha(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (\text{где } \alpha(x) \text{ — бесконечно малая})$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underbrace{\alpha(x)(x - a)}_{=o(x-a)}$$

Итого:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

Теорема 2.4.16 (С остаточным членом в форме Пеано). Если $\exists f^{(n)}(a)$, то верно следующее равенство:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Доказательство. Введем следующий многочлен, который называется *многочленом Тейлора*:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Будем дифференцировать этот многочлен (следует заметить, что $f(a)$ и ее производные являются постоянными, так как a — фиксированное).

$$P'_n(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = f''(a) + f'''(a)(x-a) + \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

...

Заметим следующие закономерности:

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a), \quad P_n^{(n+1)}(a) = 0, \quad \dots$$

Обозначим разность между многочленом Тейлора и значением функции как $R_n = f(x) - P_n(x)$ (остаточный член). Тогда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Из теоремы остается доказать, что остаточный член есть величина более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Из того, как мы взяли R_n следует, что все производные R_n в точке a вплоть до n -ой включительно равны нулю. Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$. Воспользуемся правилом Лопиталя (2.4.10):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_n(x)}{n(x-a)^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

Мы не можем брать дальше $(n-1)$ -ой производной, так как по условию функция дифференцируема лишь в точке a , но не в ее окрестности, а R_n есть разность между значением функции и многочленом. Но из того, что функция имеет n -ую производную в точке следует, что она имеет $(n-1)$ -ую производную в окрестности точки (иначе нельзя взять n -ую производную).

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} R_n^{(n)}(\xi) = \frac{1}{n!} R_n^{(n)}(a) = 0$$

Последние переходы по теореме Лагранжа (2.4.8), ξ лежит между x и a . □

Теорема 2.4.17 (С остаточным членом в форме Лагранжа). *Если $\exists f^{(n+1)}(a)$, то верно следующее равенство:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Доказательство. Большая часть доказательства сохраняется из теоремы 2.4.16 (в частности до момента анализа остаточного члена).

Итак, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Рассмотрим отношение:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{(x-a)^{n+1} - (a-a)^{n+1}} = \frac{R'_n(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R'_n(x_1) - R'_n(a)}{(n+1)((x_1-a)^n - (a-a)^n)} = \frac{R''_n(x_2)}{n(n+1)(x_2-a)^{n-1}} = \dots = \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n-a)} = \\
&= \frac{R_n^{(n)}(x_n) - R_n^{(n)}(a)}{(n+1)!(x_n-a)} = \frac{1}{(n+1)!} R_n^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Где ξ между x и a .

□

Пример. [Разложение функций относительно нуля]

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1})$$

2.5 Замечательные пределы

*Cuius rei demonstrationem mirabilem sane
setex hanc marginis exiguita non caparet.*

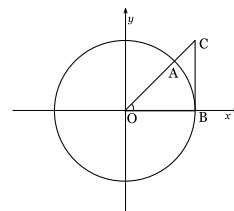
Fermat

2.5.1 Первый замечательный предел

Теорема 2.5.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Построим тригонометрическую окружность единичного радиуса. Пусть её центр - точка O . Точка B имеет координаты $(1; 0)$, точка A имеет координаты $(\cos x; \sin x)$. Точка C лежит на пересечении прямой OA и прямой, параллельной Oy и проходящей через точку B .



$$BC = \operatorname{tg} x$$

Из рисунка видно, что площадь кругового сегмента AOC меньше площади треугольника AOC , которая, в свою очередь, меньше площади треугольника BOC .

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Пусть $x > 0$ (для $x < 0$ абсолютно аналогично). Тогда:

$$\underbrace{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}_{\text{чётные функции}}$$

Если:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

То:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$$

□

Утверждение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Утверждение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Утверждение. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

2.5.2 Второй замечательный предел. Число e

Определение.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7183$$

Теорема 2.5.2.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Докажем, что $x(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!}$$

Члены x_n меньше соответствующих членов x_{n+1} , к тому же в x_{n+1} имеется на один член больше. Из этого следует, что $x_n < x_{n+1}$. То есть $x(n)$ возрастающая.

С другой стороны

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 3$$

Из этого следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует.

□

Утверждение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Утверждение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Теорема 2.5.3.

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$n = [x]$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

С другой стороны

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > e - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

□

Теорема 2.5.4.

$$\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Пусть $x = -t$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = e$$

□

Теорема 2.5.5. Число e иррационально.

Доказательство. Распишем число e по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \quad \xi \in (0; 1)$$

Пусть $e = \frac{m}{n}$. Тогда домножим предыдущую формулу на $n!$ и получим

$$m(n-1)! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \cdot n! + \frac{e^\xi}{n+1}$$

Получили противоречие, так как в левой части стоит натуральное число, а правая часть состоит из двух слагаемых, одно из которых натуральное, а другое – дробное: $0 < \frac{e^\xi}{n+1} < 1$. □

2.6 Алгебраические операции

Spiritus est aqua vitae

народная мудрость

2.6.1 Определение основных понятий

Определение. Пусть $\mathbf{A}$ - множество. Тогда *операция на $\mathbf{A}$* — отображение $\mathbf{A} \xrightarrow{f} \mathbf{A}$

Пример. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ операции сложения $(+)$ и умножения $(\times)$ являются алгебраическими операциями, а операция вычитания $(-)$ - нет, как разность $2 - 5 = -3$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ не существует.

Пример. На множестве всех векторов на плоскости $\mathbb{V}$ операция скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ не является алгебраической так как она выводит из множества векторов $\mathbb{V}$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Определение. *Прямое произведение* $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a, b), a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}\}$. Для общего случая

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \dots \times \mathbf{A}_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_k \in \mathbf{A}_k\}$$

То есть прямым (декартовым) произведением произвольного количества множеств называется множество, состоящее из всех возможных строк, в которых на k -ом месте стоит элемент k -го множества. При этом произведение (a, b) на (a', b') можно определить как $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$, т.е. умножение идёт покомпонентно (для случая с произвольным количеством элементов в строке абсолютно аналогично).

Пример. Прямым произведением множества $\mathbf{A} = \{0, 1, 2\}$ на множество $\mathbf{B} = \{2, 3\}$ будет множество $\mathbb{C}$ всех пар (a, b) $a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}$, такое что

$$\mathbb{C} = \{(0, 2); (0, 3); (1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3)\}$$

Определение. $\mathbb{P}(\mathbf{X})$ — множество всех подмножеств множества $\mathbf{X}$

Пример. Если $\mathbf{X} = \{0, 1, 2\}$, то $\mathbb{P}(\mathbf{X}) = \{\{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0, 1\}; \{0, 2\}; \{1, 2\}; \{0, 1, 2\}; \{\emptyset\}\}$

Определение. Операция называется ассоциативной, если $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c$

Определение. Операция называется коммутативной, если $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b$

Замечание. Здесь и далее знаком $\cdot$ (умножение) обозначается произвольная алгебраическая операция.

Если множество $\mathbf{A}$ конечно, то операции на нём можно задавать с помощью таблицы, называемой таблицей Кэли. Пусть $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда в i -ой строке j -ом столбце будет стоять элемент из множества $\mathbf{A}$, являющийся произведением $a_i \cdot a_j$. Если таблица Кэли симметрична относительно главной диагонали, то множество с этой операцией обладает коммутативностью.

Пример. Для множества $\mathbb{Z}_4 = 0, 1, 2, 3$ с операцией $\oplus$ (сложение по модулю 4 на множестве остатков от деления на 4) таблица Кэли будет выглядеть следующим образом:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Определение. Если $\mathbf{A}$ - множество с операцией, то в нём могут быть определены следующие элементы:

Левая единица	—	e_1 :	$e_1 \cdot x = x$	$\forall x$
Правая единица	—	e_2 :	$x \cdot e_2 = x$	$\forall x$
Левый нуль	—	z_1 :	$z_1 \cdot x = z_1$	$\forall x$
Правый нуль	—	z_2 :	$x \cdot z_2 = z_2$	$\forall x$

e — двухсторонняя единица, если $ex = xe = x \quad \forall x$
 z — двухсторонний нуль, если $zx = xz = z \quad \forall x$

Замечание. Если иного не указано, то в дальнейшем, если указано, что в множестве с операцией есть единица (нуль), то будем считать их двухсторонними

Теорема 2.6.1. Если в множестве с операцией есть e_1 и e_2 , то $e_1 = e_2 = e$

Доказательство.

$$\begin{cases} e_1 \cdot e_2 = e_2, & e_1 - \text{левая единица} \\ e_1 \cdot e_2 = e_1, & e_2 - \text{правая единица} \end{cases} \Rightarrow e_1 = e_2$$

□

Теорема 2.6.2. Если в множестве с операцией есть z_1 и z_2 , то $z_1 = z_2 = z$.

Теорема 2.6.3. В множестве с операцией может быть не более одной единицы.

Доказательство. Пусть в множестве существует две двухсторонних единицы. Тогда рассмотрим выражения

$$\begin{cases} e_1 \cdot e_2 = e_2, & e_1 - \text{единица} \\ e_1 \cdot e_2 = e_1, & e_2 - \text{единица} \end{cases} \Rightarrow e_1 = e_2$$

□

Теорема 2.6.4. В множестве с операцией может быть не более одного нуля.

2.6.2 Изоморфизм

Пусть $(\mathbf{A}, *)$; $(\mathbf{B}, \circ)$ — два множества с операциями. Пусть $x, y \in \mathbf{A}$; $x', y' \in \mathbf{B}$

Определение. Два множества с операциями называются изоморфными (обозначается $\phi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$), если:

1. Существует взаимнооднозначное соответствие между $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

2. ϕ сохраняет операцию:

$$\forall x, y \in \mathbf{A} \quad \phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

Обозначается $(\mathbf{A}, *) \cong (\mathbf{B}, \circ)$

Пример. Множество всех поворотов плоскости вокруг фиксированной точки на $0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$ изоморфно множеству $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$.

Утверждение. Если $(\mathbf{A}, *) \xrightarrow{\phi} (\mathbf{B}, \circ)$ и e - единица в $(\mathbf{A}, *) \Rightarrow \phi(e)$ - единица в $(\mathbf{B}, \circ)$.

Утверждение. Если $\mathbf{A} \xrightarrow{\phi} \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\psi\phi} \mathbf{C}$

Теорема 2.6.5. Если ϕ - изоморфизм, то и ϕ^{-1} - изоморфизм.

Доказательство. Так как $\exists \phi^{-1}$, то взаимнооднозначное соответствие уже существует. Пусть

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x_1 & \phi^{-1}(x_1) &= x \\ \phi(y) &= y_1 & \phi^{-1}(y_1) &= y \end{aligned}$$

Тогда

$$\phi^{-1}(x_1 \circ y_1) = \phi^{-1}(\phi(x) \circ \phi(y)) = \phi^{-1}(\phi(x * y)) = x * y = \phi^{-1}(x_1) * \phi^{-1}(y_1)$$

□

2.6.3 Гомоморфизм

Гомоморфизм является более общим случаем изоморфизма. При гомоморфизме сохраняется операция, но не обязательно существует взаимнооднозначное соответствие.

При гомоморфизме групп верны следующие утверждения:

Утверждение. $e \rightarrow \varphi(e)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot e) &= \varphi(a)\varphi(e) \\ \varphi(a) &= \varphi(a)\varphi(e) \\ \varphi(a)^{-1}\varphi(a) &= \varphi(a)^{-1}\varphi(a)\varphi(e) \\ e' &= e' \cdot \varphi(e) \\ \varphi(e) &= e' \end{aligned}$$

□

Утверждение. $a^{-1} \rightarrow \varphi(a)^{-1}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(a)\varphi(a^{-1}) &= \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) \\ \varphi(a)^{-1}\varphi(a)\varphi(a^{-1}) &= \varphi(a)^{-1}\varphi(e) \\ e' \cdot \varphi(a^{-1}) &= \varphi(a)^{-1}\varphi(e) = \varphi(a)^{-1} \cdot e' \\ \varphi(a^{-1}) &= \varphi(a)^{-1} \end{aligned}$$

□

2.7 Теория групп

There's no sense in being precise when you don't even know what you're talking about.

John von Neumann

2.7.1 Полугруппы

Определение. Полугруппа — множество с ассоциативной операцией.

Определение. Пусть $\mathbf{X}$ — множество. Тогда $\mathbb{T}_{\mathbf{X}}$ — множество всех отображений $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{X}$. Если $\mathbf{X} = \{1, 2, \dots, n\}$, то $\mathbb{T}_{\mathbf{X}}$ обозначается как $\mathbb{T}_n$. В таком случае $|\mathbb{T}_n| = n^n$.

Множество всех отображений $\mathbb{T}_n$ является полугруппой преобразований множества.

Пример.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \text{отображения}$$

$\Downarrow$

1.

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$g \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$f \cdot g \cdot f = f \cdot (g \cdot f) = (f \cdot g) \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4. ...

2.7.2 Группы

Определение. Группа — множество с операцией, удовлетворяющее условиям:

1. Ассоциативность

2. $\exists e$

3. $\forall a \quad \exists b \quad ab = ba = e$. Обозначается $b = a^{-1} \quad (a = b^{-1})$

Группа является частным случаем полугруппы.

Пример.

$$\begin{array}{ll} (\mathbb{Z}, +) & - \text{ группа} \\ (\mathbb{R}, \cdot) & - \text{ не является группой} \end{array}$$

Определение. Пусть $\mathbf{X}$ — множество. Тогда $\mathbb{S}_{\mathbf{X}}$ — множество всех взаимнооднозначных отображений $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$. Если $\mathbf{X} = \{1, 2, \dots, n\}$, то $\mathbb{S}_{\mathbf{X}}$ обозначается как $\mathbb{S}_n$. В таком случае $|\mathbb{S}_n| = n!$.

Множество всех отображений $\mathbb{S}_n$ является группой преобразований множества и является частным случаем $\mathbb{T}_n$; называется группой подстановок.

Теорема 2.7.1. *Единица в группе единственна.*

Доказательство. См. теорему 2.6.3 □

Теорема 2.7.2. *Обратный элемент в группе единственен.*

Доказательство. Пусть

$$b_1 = a^{-1}$$

$$b_2 = a^{-1}$$

Рассмотрим произведение

$$b_1 \cdot a \cdot b_2 = (b_1 \cdot a)b_2 = b_1(a \cdot b_2)$$

$$eb_2 = b_1e$$

$$b_1 = b_2$$

□

Утверждение.

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Доказательство. Докажем, что $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = e$ и $(b^{-1}a^{-1}) \cdot (ab) = e$:

$$(b^{-1}a^{-1}) \cdot (ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$$

$$(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$$

□

Определение.

$$1. a^0 = e$$

$$2. a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

$$3. a^{-k} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{k \text{ раз}}$$

Утверждение.

$$1. (a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$$

$$2. a^{k+l} = a^k \cdot a^l$$

$$3. a^{kl} = (a^k)^l$$

Определение. *Количество инверсий* ($|\sigma|$) — количество таких пар элементов k и l , что если $k < l$, то $i_k > i_l$.

Определение. σ называется чётной подстановкой, если $|\sigma| \div 2$

Определение. *Транспозиция* — изменение мест 2 элементов между друг другом.

Утверждение. Транспозиция меняет чётность подстановки на противоположную.

Доказательство.

1. $|k - l| = 1$: в этом случае кол-во инверсий меняется на одну, так как положение меняемых элементов относительно других не меняется.
2. $|k - l| \geq 2$: в этом случае мы как будто проводим $2t - 1$, $t = |k - l|$ элементарных транспозиций, перемещая сначала один элемент на место другого, а потом второй — на место первого. При каждой элементарной транспозиции чётность подстановки изменяется на противоположную. Следовательно, в итоге чётность транспозиции изменилась на противоположную.

□

Утверждение. $|\sigma| = |\sigma^{-1}|$

Доказательство. Два столбца в подстановке $\sigma = \begin{pmatrix} \dots & a & \dots & b & \dots \\ \dots & x & \dots & y & \dots \end{pmatrix}$ стоят "неправильно" если

$$(a < b) \& (x > y) \quad \cup \quad (a > b) \& (x < y)$$

При этом $|\sigma|$ можно рассматривать как количество "неправильных" пар столбцов. Но так как можно сказать, что σ^{-1} образуется заменой мест строк подстановки (верхняя на нижнюю, нижняя на верхнюю), то очевидно, что количество "неправильных" пар столбцов при этом не меняется. □

2.7.3 Циклы

Определение. *Цикл* — подстановка, такая что $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k \rightarrow \alpha_1$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Обозначается $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$

Теорема 2.7.3. *Всякая подстановка представима в виде произведения независимых циклов.*

$$\sigma = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n \quad \forall i, j \quad \alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$$

Доказательство. Представим подстановку в виде графа. На графе из одного узла не может выходить более одной стрелки и в один узел не может входить более одной стрелки в силу взаимнооднозначности; иначе говоря, в каждый узел входит одна стрелка и из каждого узла выходит одна стрелка. Тогда можем совершить конечное количество обходов графа по циклам. □

Замечание. Также можно определить транспозицию как цикл длины два: $\alpha = (i, j)$ - транспозиция.

Теорема 2.7.4. *Всякая подстановка представима в виде произведения транспозиций.*

Доказательство. Опираясь на теорему 2.7.3, получаем, что достаточно доказать, что любой цикл является произведением транспозиций. Разложение цикла в транспозиции можно определить так:

$$(k_1, k_2 \dots, k_n) = (k_1, k_2)(k_1, k_3) \dots (k_1, k_n)$$

□

Замечание. Если $|\sigma| \geq 2$, то она является произведением чётного числа транспозиций.

2.7.4 Порядок элемента группы

Определение. Порядком элемента a в группе называется наименьшее $n \in \mathbb{N}$, такое что $a^n = e$. Обозначается $o(a) = n$. Если $\nexists o(a)$, то принято считать, что $o(a) = \infty$.

Порядок элемента группы отвечает следующим свойствам:

1. $o(a^{-1}) = o(a)$

Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$. Но $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Следовательно $o(a^{-1}) \leq o(a)$. Заменив a^{-1} на a , получим, что $o(a^{-1}) \geq o(a)$. Следовательно $o(a^{-1}) = o(a)$. □

2. $o(g^{-1}ag) = o(a)$

Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$. Но $(g^{-1}ag)^n = g^{-1}a^n g = e$. Следовательно $o(g^{-1}ag) \leq o(a)$. Заменив $g^{-1}ag$ на gag^{-1} , получим, что $o(gag^{-1}) \geq o(a)$. Следовательно $o(g^{-1}ag) = o(a)$. □

3. $o(ab) = o(ba)$

Доказательство. Воспользуемся предыдущим пунктом: пусть $g = a$. Тогда $o(ab) = o(g^{-1}(ab)g) = o(ba)$. □

4. Если $o(a) = n$ и $a^m = e$, то $m : n$

Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$, $a^m = e$. Докажем, что $m : n$. Разделим m на n с остатком: пусть $m = \alpha n + r$ $0 \leq r < n$. Тогда $e = a^m = a^{\alpha n + r} = a^{\alpha n} \cdot a^r = (a^n)^\alpha \cdot a^r = e \cdot a^r$. Следовательно $a^r = e$, т.е. $r = 0$. Следовательно $m : n$. □

5. Если $o(a) = n$, $(k; n) = 1$, то $o(a^k) = o(a)$

Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = e$. Можно показать, что $(a^k)^n = e$, $(a^n)^k = e$. Тогда $o(a^k) \leq n$. Пусть $\exists t \in (0; n)$, что $(a^k)^t = a^{kt} = e \Rightarrow kt : n \Rightarrow t : n$, однако $t \leq n$. Противоречие. Следовательно $o(a^k) = n$. □

6. Если $o(a) = n$, $k|n$, то $o(a^k) = \frac{n}{k}$

Доказательство. Пусть $o(a) = n$. Тогда $a^n = a^{kd} = (a^k)^d = e \Rightarrow o(a^k) \leq d$.
Пусть $\exists t \in (0; d)$, что $(a^k)^t = a^{kt} = e$. Но $kt : n$ (по пункту 4) И т.к. $kt < n \Rightarrow \nexists t$.
Противоречие. Следовательно $o(a^k) = d = \frac{n}{k}$. $\square$

2.8 Действительные числа

*I don't know, I don't care, and it doesn't make
any difference!*

Albert Einstein

2.8.1 Основные определения

Определение. *Действительное число* — число вида

$$\pm a_0, a_1 a_2 \dots, \quad a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \quad \forall i > 0$$

Для того, чтобы исключить неоднозначность записи, числа вида $a_0, a_1 \dots a_i 999 \dots$ $a_i \neq 9$ запрещаются. Они равны числам вида $a_0, a_1 \dots (a_i + 1) 000 \dots$.

В множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ помимо множеств натуральных и целых чисел выделяют подмножества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и иррациональных чисел $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Определение. *Периодическая дробь* — дробь, цифры в десятичной записи которой начиная с некоторого знака после запятой начинают повторяться с определённым периодом.

Определение. *Рациональное число* — число, представимое в виде отношения целого числа к натуральному. Это отношение всегда является периодической дробью.

Теорема 2.8.1. *Число $\sqrt{2}$ — иррационально.*

Доказательство. Пусть $\sqrt{2}$ — рационально. Тогда $\exists m, n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Будем считать, что эта дробь не сократима. Тогда

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

Так как $m^2 : 2$, то и $m : 2$. Пусть $m = 2k$. Тогда

$$4k^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = n^2 \quad \Rightarrow \quad n : 2$$

Следовательно дробь $\frac{m}{n}$ — сократима. Противоречие. $\square$

Теорема 2.8.2. *Сумма двух рациональных чисел рациональна.*

Доказательство. Рассмотрим сумму $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$, $mq+np \in \mathbb{Z}, nq \in \mathbb{N}$ $\square$

Теорема 2.8.3. *Сумма рационального и иррационального чисел иррациональна.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{I}$. Рассмотрим сумму $x + y = z$. Пусть $z \in \mathbb{Q}$. Тогда $y = z - x \in \mathbb{Q}$ как разность двух рациональных чисел. Противоречие. $\square$

Пользуясь приёмом доказательства теоремы 2.8.1 и двумя предыдущими теоремами можно доказывать иррациональность таких чисел как $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ и т.п.

Теорема 2.8.4. *Для любых двух рациональных чисел a и b ($a < b$) существует $c \in \mathbb{Q}$, такое что $a < c < b$.*

Теорема 2.8.5. *Для любых двух рациональных чисел a и b ($a < b$) существует $c \in \mathbb{R}$, такое что $a < c < b$.*

Доказательство этих двух теорем основано на записи числа в виде бесконечной дроби и последовательном рассмотрении знаков после запятой в каждом из этих чисел.

2.8.2 Аксиомы действительных чисел

Существует также аксиоматический подход к заданию множества действительных чисел. При таком подходе множеством действительных чисел является любое множество, обладающее операциями сложения (+), умножения ($\times$) и сравнения ($\leq$), удовлетворяющее следующим семнадцати аксиомам.

1. $\forall x, y \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists 0 \quad \forall x \quad x + 0 = x$
4. $\forall x \quad \exists y \quad x + y = 0$
5. $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$
6. $\forall x, y, z \quad x(yz) = (xy)z$
7. $\exists 1 \neq 0 \quad x \cdot 1 = x$
8. $\forall x \neq 0 \quad \exists y \quad xy = 1$
9. $\forall x, y, z \quad (x + y)z = xz + yz$
10. $\forall x \quad x \leq x$
11. $\forall x, y, z \quad x \leq y \ \& \ y \leq z \Rightarrow x \leq z$
12. $\forall x, y \quad x \leq y \ \& \ y \leq x \Rightarrow x = y$
13. $\forall x, y \quad x \leq y \cup y \leq x$
14. $\forall x, y, z \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
15. $\forall x, y, z \geq 0 \quad x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$
16. $\forall x, y > 0 \quad \exists n \quad nx > y$ (аксиома Архимеда)
17. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \neq \emptyset \quad \forall a \in \mathbf{A} \quad a < \forall b \in \mathbf{B} \Rightarrow \exists c \quad \forall a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} \quad a \leq c \leq b$ (аксиома полноты)

Замечание. Аксиома полноты (п.17) заменяет собой ранее сформулированную теорему 2.8.5

2.8.3 Супремум и инфимум. Принцип вложенных отрезков

Определение. *Верхней гранью* числового множества $\mathbf{A}$ называется такое число c , что $\forall a \in \mathbf{A} \quad c \leq a$.

Определение. *Точная верхняя грань* числового множества $\mathbf{A}$ называется такое число c , что $\forall c' < c \quad \exists a \in \mathbf{A} \geq c'$. Обозначается $c = \sup \mathbf{A}$.

Аналогично даётся определение нижней грани числового множества и точной нижней грани ($\inf \mathbf{A}$) числового множества.

Пример. $\sup[0; 1] = \sup(0; 1) = 1$

Теорема 2.8.6. Если $\exists \sup \mathbf{A} = c$, то такое c единственно.

Доказательство. Пусть

$$\sup \mathbf{A} = c$$

$$\sup \mathbf{A} = c'$$

Тогда

$$\forall a \in \mathbf{A} \quad c \geq a$$

$$\forall d < c \quad \exists a \geq d$$

С другой стороны

$$\forall a \in \mathbf{A} \quad c' \geq a$$

$$\forall d' < c' \quad \exists a \geq d'$$

Пусть $c < c'$. Тогда если $c' = \sup \mathbf{A}$, то c - не супремум. Противоречие. $\square$

Теорема 2.8.7. Если $\mathbf{A} \neq \emptyset$ - ограниченное, то $\exists \sup \mathbf{A}$

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ - множество всех верхних границ множества $\mathbf{A}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \quad \mathbf{A} \leq c \leq \mathbf{B}.$$

Т.к. $c \geq \forall a \in \mathbf{A}$, то c - верхняя грань.

Если существует $c' < c$, тоже являющееся верхней гранью, то $c \in \mathbf{B}$ (т.е. $\exists b \in \mathbf{B} < c$). Противоречие. Следовательно c является супремумом множества $\mathbf{A}$. $\square$

Замечание. Запись $c \leq \mathbf{A}$ условна и подразумевает $\forall a \in \mathbf{A} \quad c \leq a$

Теорема 2.8.8 (Прицип вложенных отрезков). Если на множестве действительных чисел задана последовательность вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots$, где $\Delta_k = [a_k; b_k]$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k \neq \emptyset$

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \{a_1; a_2; \dots\}, \mathbf{B} = \{b_1; b_2; \dots\}$

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \quad \dots b_2 \leq b_1$$

Тогда по аксиоме полноты $\exists c \quad \mathbf{A} \leq c \leq \mathbf{B}$. $\square$

Замечание. На самом деле две предыдущие теоремы равносильны между собой и равносильны аксиоме полноты. Если одну из них принять за аксиому, то две оставшиеся выводятся из неё.

Теорема 2.8.9 (Теорема Вейрштрасса). Возрастающая ограниченная последовательность имеет предел сверху.

Замечание. Эта теорема обратна одному из частных случаев теоремы 2.1.2, доказанной ранее.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{A} = \{x_i\} \neq \emptyset \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots$$

По условию

$$\exists M \quad \forall n \quad x_n \leq M.$$

Пусть

$$\mathbf{B} = \{M_i \mid x_n \leq M_i \leq M \quad \forall n\} \neq \emptyset$$

По аксиоме полноты

$$\exists c \quad \mathbf{A} \leq c \leq \mathbf{B}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Если нет членов $x_i \quad x_i \geq c - \varepsilon$, то $c - \varepsilon \in \mathbf{B}$. Противоречие. Следовательно

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad x_N \geq c - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

□

2.9 Комплексные числа

Honesta mors turpi vita potior¹

Tacit

2.9.1 Определение комплексных чисел. Основные свойства

Определение. *Комплексное число* — упорядоченная пара $z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

На множестве комплексных чисел пару $(a, 0)$ можно ассоциировать с действительным числом a . Поэтому $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

На множестве комплексных чисел можно определить операции сложения (вычитания) и умножения (деления):

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
2. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Основные свойства комплексных чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Доказательство. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = z_2 + z_1$ □

2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

3. $\exists 0 \quad \forall z \quad z + 0 = z$

Доказательство. $z + (0, 0) = z$ □

4. $\forall z \quad \exists z' \quad z + z' = 0$

Доказательство. $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ □

5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Доказательство. $z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d)(a, b) = z_2 z_1$ □

6. $z_1 \cdot (z_2 z_3) = (z_1 z_2) \cdot z_3$

7. $\exists 1 \quad \forall z \quad z \cdot 1 = z$

Доказательство. $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$ □

¹Честная смерть лучше позорной жизни

$$8. (z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$$

$$9. \forall z \neq 0 \quad \exists z_1 \quad z \cdot z_1 = 1. \quad \text{Обозначается } z_1 = z^{-1}$$

Доказательство. Пусть $z_1 = (x, y)$. Рассмотрим выражение $(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

□

Замечание. При доказательстве свойств комплексных чисел мы опираемся на свойства действительных чисел, принятые ранее аксиоматически. Доказательство пунктов 2, 6 и 8 Вы можете проделать самостоятельно.

2.9.2 Алгебраическая форма. Основные понятия

Рассмотрим число $i = (0, 1)$. Рассмотрим выражение

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$$

Число $i = (0, 1) = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей.

Запись числа z в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (y, 0)(0, 1) = x + iy$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа. При этом $x = \operatorname{Re}(z)$ называется действительной частью, а $y = \operatorname{Im}(z)$ – мнимой частью комплексного числа z . Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме проводятся так же, как и с обычными скобками.

Пример. $(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

При этом комплексное число можно рассматривать как вектор на плоскости с декартовой системой координат. Тогда (x, y) – координаты вектора z . Вводится понятие модуля комплексного числа – $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, равное длине вектора. Тогда операция сложения двух комплексных чисел ассоциируется со сложением векторов, но операция умножения двух комплексных чисел аналога в математике векторов не имеет.

Также вводится понятие сопряжённого к z – $\bar{z}$. Если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Для сопряжённых к z чисел выполняются следующие свойства, доказываемые с помощью записи комплексных чисел в алгебраической форме:

$$1. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

Доказательство. $\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ □

$$2. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Доказательство.

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$\Downarrow$

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Но и

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Следовательно

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

□

3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Доказательство. $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - ixy + y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ □

2.9.3 Тригонометрическая форма. Формула Муавра

Рассматривая комплексное число как вектор с координатами (x, y) , можно сказать, что он составляет некоторый угол с положительным направлением оси x .

Определение. *Аргументом* комплексного числа z — $\arg z$ называется число $\varphi \in [0, 2\pi)$, что $z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi$.

Обычно $|z|$ обозначается как ρ , и комплексное число записывается в форме

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Пример. $z = 2 + 2i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

С тригонометрической формой записи связана и показательная (экспоненциальная) форма записи комплексного числа — $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}$.

Пример.

$$e^{i\pi} = -1$$

Рассмотрим произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Тогда

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \dots = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Для этого надо воспользоваться тем фактом, что $z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho^2} \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{1}{\rho} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

Утверждение. Из формулы для умножения двух комплексных чисел в тригонометрической форме следует, что

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Эта формула называется формулой Муавра.

Из формулы Муавра можно вывести формулу для корня n -ной степени из комплексного числа, также называемой формулой Муавра.

Решение. Пусть $\sqrt[n]{z} = \omega \Leftrightarrow \omega^n = z, \quad z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \omega = \sigma(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Тогда

$$\omega^n = \sigma^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \rho &= \sigma^n \\ \cos n\alpha &= \cos \varphi \\ \sin n\alpha &= \sin \varphi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \sigma &= \sqrt[n]{\rho} \\ n\alpha &= \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

То есть мы получили, что

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Существует $n-1$ различных корней n -ной степени из z .

2.9.4 Примеры применения комплексных чисел

Задача. В круг радиуса R вписан правильный n -угольник. Одна из вершин n -угольника соединена с остальными. Найти произведение длин всех отрезков.

Решение. Введём систему координат, связанную с центром круга. Расположим n -угольник так, чтобы вершина, из которой мы проводим отрезки, оказалась с координатами $(R, 0)$. Тогда координаты всех вершин n -угольника на комплексной плоскости будут являться корнями n -ной степени из R . Обозначим за ω_i комплексные числа, задающие вершины многоугольника, разделённые на R . Тогда нам надо найти

$$\prod_{k=1}^{n-1} R|\omega_0 - \omega_k| = \dots = nR^{n-1}$$

Ответ. nR^{n-1}

Задача. Найти общую формулу для $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$.

Решение.

$$\begin{aligned}\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi &= \operatorname{Re} \left((\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi) + i(\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left((\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \right)\end{aligned}$$

Обозначим $\cos \varphi + i \sin \varphi$ за некоторое комплексное число z . Тогда наше выражение примет вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z + z^2 + \dots + z^n) &= \operatorname{Re} \left(\frac{z^{n+1} - z}{z - 1} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi - \cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi - 1} \right) = \\ &= \frac{\cos(n+1)\varphi - \cos \varphi}{\cos \varphi - 1} = \dots = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{\varphi(n+1)}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}\end{aligned}$$

3 11 класс. I полугодие

Вопросы к экзамену №1 за 1 полугодие 11 класса

1. Разложение подстановки в произведение циклов
2. Количество инверсий подстановки. Чётность, нечётность. Транспозиции. Обратная подстановка.
3. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
4. Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании.
5. Линейность определителя.
6. Перестановка строк (столбцов) определителя.
7. Разложение определителя по строке (столбцу).
8. Определитель произведения матриц.
9. Обратная матрица.
10. Запись системы линейных уравнений в матричном виде. Правило Крамера.
11. Поле рациональных функций. Разложение правильной дроби на простейшие.
12. Векторное произведение векторов и его свойства.
13. Выражение векторного произведения векторов через координаты.
14. Смешанное произведение векторов. Его геометрический смысл и свойства.
15. Выражение смешанного произведения через координаты векторов (в косоугольной и прямоугольной системах координат).
16. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
17. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
18. Аксиомы объёмов. Простейшие свойства.
19. Существование неизмеримого множества.
20. Объём прямоугольного параллелепипеда с рациональными и произвольными длинами рёбер.
21. Объём параллелепипеда (через основание и высоту, через перпендикулярное сечение и боковое ребро).
22. Объём призмы.

3.1 Объемы тел

The said truth is that it is the greatest happiness of the greatest number that is the measure of right and wrong.

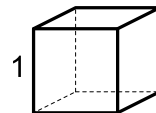
Jeremy Bentham

3.1.1 Аксиомы теории мер

Определение. Объемом тела B — $V(B)$ — называется такое число, для которого выполнены аксиомы меры.

Существует четыре аксиомы меры.

1. $\forall B: V(B) \geq 0$.
2. Если $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то $V(B) = V(B_1) + V(B_2)$ (аддитивность).
3. Если $B_1 \equiv B_2$, то $V(B_1) = V(B_2)$.
4. Объем куба со стороной 1 равен единице.



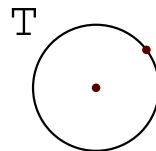
Замечание (К пункту 3). Две фигуры называются эквивалентными, если существует движение (отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, сохраняющее расстояние), переводящее первое тело во второе.

Замечание (К пункту 2). Эта аксиома выполняется в более широком количестве случаев. Простая аддитивность выполняется для конечного числа непересекающихся тел или если их пересечение несущественно (т. е. тела касаются). Существует также сигма-аддитивность объемов: если тело представимо в виде бесконечного числа несущественно пересекающихся бесконечно малых тел.

3.1.2 Неизмеримые множества

В теории мер существуют неизмеримые множества. Примером такого множества является множество Витали. Возьмем окружность T . Пусть ее мера равна единице.

Точку α на окружности будет отождествлять с числом в интервале $[0; 2\pi)$ (то есть, грубо говоря, задавать углом). Назовем точки α и β эквивалентными ($\alpha \sim \beta$), если одну из другой можно получить поворотом на $2\pi q$, $q \in \mathbb{Q}$. Определим класс точек $K(\alpha)$, эквивалентных α :



$$K(\alpha) = \{x \mid x \sim \alpha\} = \{\alpha + 2\pi q \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

Тогда ясно, что вся окружность (множество T) является объединением всех классов точек на окружности.

$$T = \bigcup_{\alpha} K(\alpha)$$

Возьмем множество A_0 , содержащее ровно по одному элементу из каждого класса. Докажем, что множество A неизмеримо. Для этого возьмем некоторый элемент r из $\mathbb{Q}$. Пусть множество A_r — это множество A_0 , «повернутое» на $2\pi r$:

$$A_r = \{x + 2\pi r \mid x \in A_0\}$$

Можно естественно ограничить r в интервал $[0; 1)$, так как α и $(\alpha + 2\pi)$ означают одну и ту же точку. Теперь, так как множество $\mathbb{Q}$ счетно, пронумеруем все r : $r_1, \dots, r_n, n \in \mathbb{N}$. Докажем, что окружность — это объединение всех A_{r_i} :

$$T = \bigcup_n A_{r_n}$$

Возьмем некоторую точку x , лежащую на окружности. Возьмем такую точку a , ей эквивалентную, что a принадлежит A . Так как $x \sim a$, то $x - a = 2\pi q$. Отсюда: $x = a + 2\pi q$. $\exists k \in \mathbb{N}$: $q = r_k$ в силу счетности $\mathbb{Q}$. Поэтому $x \in A_{r_k}$.

Докажем от противного также, что эти множества не пересекаются. Пусть $A_{r_i} \cap A_{r_j} \neq \emptyset$. Пусть $(a = a_0 + 2\pi r_i) \in A_{r_i}$, $(b = b_0 + 2\pi r_j) \in A_{r_j}$. Тогда должны получить противоречие.

Итак, если мера множества A_0 равна μ_0 , то мера множества A_{r_i} также равна μ_0 , так как множество A_{r_i} получено поворотом. Тогда рассмотрим меру окружности:

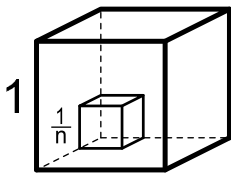
$$\mu(T) = \mu\left(\bigcup_n A_{r_n}\right)$$

В силу аддитивности меры и того факта, что A_{r_i} не пересекаются, распишем:

$$\mu(T) = \sum_n \mu(A_{r_n}) = \sum_n \mu_0$$

По условию мы взяли меру окружности равной единице. Если $\mu_0 = 0$, то получаем, что $\mu(T) = 0 + 0 + \dots = 0 \neq 1$. Если $\mu_0 \neq 0$, то $\mu(T) = \mu_0 + \mu_0 + \dots = \infty \neq 1$. Таким образом, множество A_0 неизмеримо, так как невозможно определить его меру.

3.1.3 Объемы простейших геометрических тел



Лемма 3.1.1. Объем куба со стороной $\frac{1}{n}$ равен $\left(\frac{1}{n}\right)^3$.

Доказательство. Пусть B — единичный куб. Разобьем его на n^3 кубиков со стороной $\frac{1}{n}$. Тогда:

$$B = b_1 \cup b_2 \cup \dots \cup b_{n^3}$$

По аддитивности объема, получаем:

$$V(B) = V(b_1) + V(b_2) + \dots + V(b_{n^3})$$

Объемы всех малых кубиков равны. Таким образом:

$$1 = n^3 \cdot V(b_1) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^3 = V(b_1)$$

□



Лемма 3.1.2. Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами a , b и c ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) равен abc .

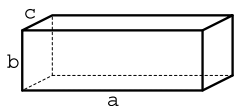
Доказательство. Пусть $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, $c = \frac{r}{s}$, $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$. Приведем дроби к общему знаменателю: $a = \frac{A}{N}$, $b = \frac{B}{N}$, $c = \frac{C}{N}$, $A, B, C, N \in \mathbb{N}$. Будем «укладывать» кубики размером $\frac{1}{N}$ в параллелепипед. Очевидно, что их будет (ABC) штук. Тогда, в силу аддитивности объема:

$$V(B) = (ABC)V(b)$$

(B — параллелепипед, b — кубик). По лемме 3.1.1, объем b равен $\frac{1}{N^3}$.

$$V(B) = \frac{ABC}{N^3} = \frac{A}{N} \cdot \frac{B}{N} \cdot \frac{C}{N} = abc$$

□



Теорема 3.1.3. Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами a , b и c ($a, b, c \in \mathbb{R}$) равен abc .

Доказательство. Обозначим параллелепипед за B .

Можно всегда выбрать такую возрастающую последовательность рациональных чисел, сходящихся слева к числу a (обозначим за $r_n \rightarrow a_-$). Также можно всегда выбрать такую убывающую последовательность рациональных чисел, сходящихся справа к числу a (обозначим за $r'_n \rightarrow a_+$). Аналогично для b выберем последовательности s_n и s'_n , для c — t_n и t'_n .

Рассмотрим еще два параллелепипеда B_0 и B'_0 со сторонам r_n , s_n , t_n и r'_n , s'_n , t'_n соответственно. Тогда:

$$B_0 \subseteq B \subseteq B'_0$$

По аксиомам меры:

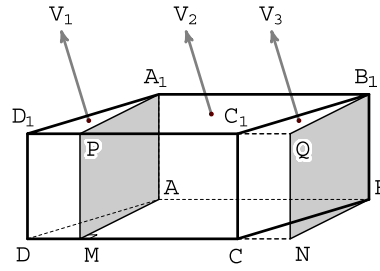
$$V(B_0) \leq V(B) \leq V(B'_0)$$

Объемы B_0 и B'_0 можно найти по лемме 3.1.2. Получаем:

$$r_n s_n t_n \leq V(B) \leq r'_n s'_n t'_n$$

При $n \rightarrow \infty$: $r_n s_n t_n \rightarrow abc$, $r'_n s'_n t'_n \rightarrow abc$. Значит, $V(B) = abc$. □

Лемма 3.1.4. Объем прямого параллелепипеда равен Sh , где S — площадь основания, а h — высота. Он же равен $S_\perp l$, где $S_\perp$ — площадь перпендикулярного сечения, а l — длина бокового ребра.

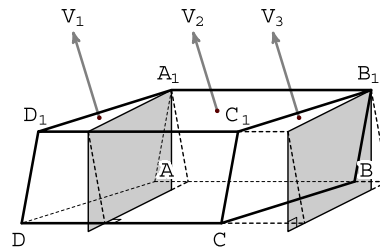


Доказательство. Построим $AM \perp CD$, $BN \perp CD$, $A_1P \perp C_1D_1$, $B_1Q \perp C_1D_1$. Обозначим объемы получившихся фигур следующим образом: $V_1 = V(AMDA_1PD_1)$, $V_2 = V(BCMAB_1C_1PA_1)$, $V_3 = V(BNCB_1QC_1)$. Очевидно, что $V_1 = V_3$. Искомый объем — $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)$ равен $V_1 + V_2 = V_3 + V_2$. Объем $V_3 + V_2 = V(ABNM A_1 B_1 QP)$ по лемме 3.1.2 равен:

$$V = \underbrace{MN \cdot NB}_S \cdot \underbrace{BB_1}_h = \underbrace{MN}_l \cdot \underbrace{NB \cdot BB_1}_{S_{\perp}}$$

Таким образом, лемма доказана. $\square$

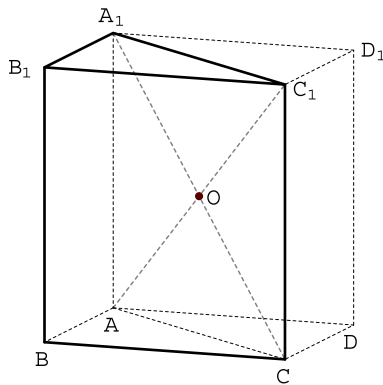
Теорема 3.1.5. Объем параллелепипеда равен Sh , где S — площадь основания, а h — высота. Он же равен $S_{\perp}l$, где $S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения, а l — длина бокового ребра.



Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему: разрежем параллелепипед двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными ребрам. Получим три объема V_1, V_2, V_3 . Искомый объем — $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = V_1 + V_2 = V_3 + V_2$. Воспользуемся леммой об объеме прямого параллелепипеда (3.1.4):

$$V_3 + V_2 = S_{ABCD} \cdot h = S_{\perp} \cdot (A_1B_1) = S_{\perp}l$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$



Лемма 3.1.6. Объем треугольной призмы равен Sh , где S — площадь основания, а h — высота. Он же равен $S_{\perp}l$, где $S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения, а l — длина бокового ребра.

Доказательство. Достроим призму до параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Тогда в силу аддитивности объема имеем следующее равенство:

$$V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = V(ABCA_1 B_1 C_1) + V(ACDA_1 C_1 D_1)$$

Из леммы 3.1.5 получаем, что $V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) = S_{ABCD} \cdot h = S_{\perp} \cdot l$. Так как получившаяся фигура симметрична относительно точки O , то объемы $V(ABCA_1 B_1 C_1)$ и $V(ACDA_1 C_1 D_1)$ равны. Отсюда (V_p — объем искомой призмы):

$$V_p = \frac{1}{2} S_{ABCD} \cdot h = S_{ABC} \cdot h$$

Аналогично для перпендикулярного сечения. □

Теорема 3.1.7. *Объем произвольной призмы равен Sh или $S_{\perp}l$.*

Доказательство. Разобьем данную призму на треугольные и просуммируем объемы, используя лемму 3.1.6. □

3.2 Операции с векторами

Divide each difficulty into as many parts as is feasible and necessary to resolve it.

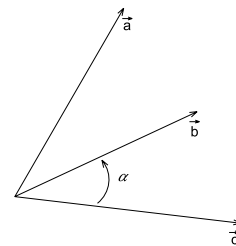
Rene Descartes

3.2.1 Векторное произведение векторов

Определение. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — 3 некопланарных вектора. $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ (именно в указанном порядке) называются *правой тройкой*, если при взгляде из конца вектора $\vec{c}$ поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки. Если поворот осуществляется по часовой стрелке, то они образуют *левую тройку*.

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая, то и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$, и $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ — правые тройки, а $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ и др. — левые.

Система координат, вводимая нами, должна являться правой тройкой.



Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ (иначе говоря, модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, натянутого на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$).
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

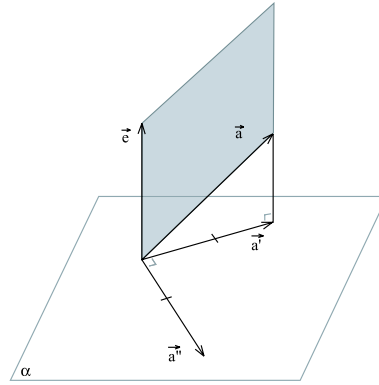
Обозначается $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения

1. $[a; b] = -[b; a]$ (антикоммутативность)
2. $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$ (линейность)
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ (дистрибутивность)

Доказательство. Для доказательства этого пункта сформулируем лемму:

Лемма. Векторным произведением $[\vec{a}, \vec{e}]$ ($\vec{e}$ — единичный вектор) является такой вектор $\vec{a}''$, полученный поворотом вектора $\vec{a}'$ на 90° в плоскости α , перпендикулярную вектору $\vec{e}$, где $\vec{a}'$ — проекция $\vec{a}$ на эту плоскость.



Доказательство.

- а) $\vec{a}'' \perp \vec{a}'$, $\vec{a}'' \perp \vec{e}$ так как $\vec{a}'' \subset \alpha \perp \vec{e}$. Следовательно $\vec{a}'' \perp a$, так как $a' \subset (\vec{e}, \vec{a}')$, а $\vec{a}'' \perp (\vec{e}, \vec{a}')$.
- б) $|\vec{a}''| = |\vec{a}'| = |\vec{a}'| \cdot |\vec{e}| = S_{\vec{a}, \vec{e}}$
- с) Вектор $\vec{a}''$ мы можем направить в нужном нам направлении.

□

Воспользуемся леммой: $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a} + \vec{b}, \lambda \vec{e}] = \lambda [\vec{a} + \vec{b}, \vec{e}] = \lambda (\vec{a} + \vec{b})'' = \lambda ((\vec{a} + \vec{b})')'$.
 Геометрически очевидно, что $(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$, и следовательно $(\vec{a} + \vec{b})'' = \vec{a}'' + \vec{b}''$.
 Тем самым мы показали, что $\lambda (\vec{a} + \vec{b})'' = \lambda ([\vec{a}, \vec{e}] + [\vec{b}, \vec{e}]) = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$. □

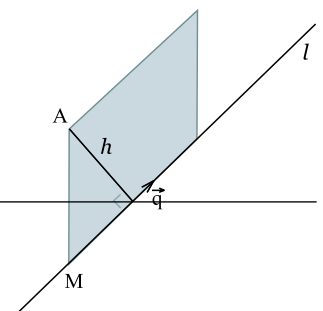
Утверждение. $[\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \gamma \vec{a} + \delta \vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} [\vec{a}, \vec{b}]$.

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в прямоугольной правой системе координат. Тогда

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}] = \\ &= a_1 b_2 [\vec{i}, \vec{j}] + a_1 b_3 [\vec{i}, \vec{k}] + \dots + a_1 b_2 [\vec{k}, \vec{j}] + \underbrace{a_3 b_3 [\vec{k}, \vec{k}]}_{=0} = \\ &= \vec{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{j}(a_3 b_1 - b_1 a_3) + \vec{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Последняя запись условна — все элементы матрицы должны являться элементами одного поля.

Как уже отмечалось, геометрический смысл векторного произведения двух векторов — площадь параллелограмма, натянутого на эти вектора. С помощью этого факта легко находить расстояние от точки до прямой в пространстве. Пусть нам необходимо



найти расстояние от точки A с координатами (a, b, c) до прямой l , заданной, например, параметрически:

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1 t \\ y = y_0 + q_2 t \\ z = z_0 + q_3 t \end{cases}$$

Искомым расстоянием будет высота параллелограмма $h = \frac{S}{a} = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{q}|}{|\vec{q}|}$, $\vec{q}$ — произвольный направляющий вектор прямой l , M — произвольная точка на прямой.

Утверждение. Если $\vec{x} \times \vec{y} = 0$, то $x \parallel y$.

3.2.2 Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ и подразумевает собой $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Свойства смешанного произведения векторов

1. $\langle \vec{a} + \vec{a}', \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}', \vec{b}, \vec{c} \rangle$ (линейность по каждому элементу)
2. $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ (линейность)

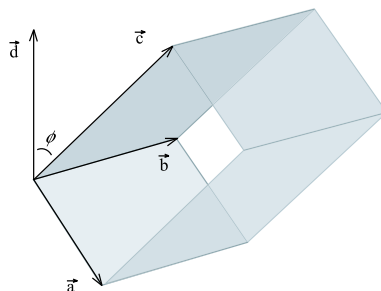
Замечание. Доказательство первых двух пунктов базируется на свойствах скалярного и векторных произведений, доказанных ранее.

3. $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle$

Доказательство. Для доказательства этого пункта сформулируем геометрический смысл смешанного произведения.

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{S_{\vec{a}, \vec{b}}} \cdot \underbrace{|\vec{c}| \cos \varphi}_h,$$

где φ — угол между вектором $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$.



То есть понятно, что

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{cases} +V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — правая тройка} \\ -V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}, & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — левая тройка} \end{cases}$$

Теперь, определив геометрический смысл, понятно, что объём параллелепипеда, натянутого на эти вектора, не изменится из-за того, что считать его основанием, а что — ребром. $\square$

Вычисление смешанного произведения Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис-вектора. В этой системе координат вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будут иметь координаты $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle &= \langle a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3, c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 \rangle = \\ &= \underbrace{a_1b_1c_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{a_1b_1c_2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle}_{=0} + a_1b_2c_3 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle + \dots = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle \end{aligned}$$

Если базис-вектора попарно взаимно перпендикулярны, то $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 1$.

С помощью векторного произведения легко находить расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве. Пусть заданы прямые l_1 и l_2 и необходимо вычислить расстояние между ними. Выберем на каждой прямой произвольную точку — $M_1 \in l_1, M_2 \in l_2$. Направляющие вектора прямых l_1 и l_2 — $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$. Тогда параллелограмм задаётся векторами $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$. Искомое расстояние есть высота параллелограмма к основанию, построенному на векторах $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$:

$$h = \frac{V}{S} = \frac{\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle}{|\vec{q}_1 \times \vec{q}_2|}$$

Утверждение. Если $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$, то x, y и z компланарны (лежат в одной плоскости).

3.3 Теория матриц

(Morpheus) *What is the Matrix? Control. The Matrix is a computer-generated dream world built to keep us under control in order to change a human being into this.*
 [Holds up a «Duracell» battery]
 (Neo) *No, I don't believe it. It's not possible.*
 (Morpheus) *I didn't say it would be easy, Neo. I just said it would be the truth.*¹

The Matrix

3.3.1 Определения

В будущем здесь (наверное) будет: определение матриц; перемножение; группа матриц.

3.3.2 Элементарные матричные преобразования (обзор).

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующего вида:

1. Прибавление к i -й строке/столбцу λj -й. Равносильно умножению исходной матрицы на матрицу, на главной диагонали которой стоят 1, а все остальные элементы матрицы, кроме $a_{ij} = \lambda$, нули.
2. Умножение i -й строки/ i -го столбца на $\lambda \neq 0$. Равносильно умножению исходной матрицы на матрицу, на главной диагонали которой стоят 1, а все остальные элементы матрицы — нули. $a_{ii} = \lambda$.
3. Перемена местами i -й и j -й строк/ i -го и j -го столбцов. Равносильно умножению на матрицу, у которой $a_{ii}, a_{jj} = 0$, остальные элементы главной диагонали равны 1. Все остальные элементы, кроме $a_{ij} = a_{ji} = 1$, равны нулю.

Утверждение. Элементарными преобразованиями любая матрица приводима к ступенчатому виду. Доказательство проводится по индукции.

¹

(Morpheus) Что такое Матрица? Власть. Матрица — это мир снов, созданный компьютером, чтобы держать нас под контролем, чтобы превратить человеческое существо в это.

(Neo) Нет, я не верю в это. Это невозможно.

(Morpheus) Я не говорил, что это будет легко. Я всего лишь сказал, что это будет правдой.

3.3.3 Определитель матрицы

Пусть задана некоторая квадратная матрица A , каждый элемент которой есть элемент коммутативного кольца с единицей.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда определителем матрицы называют следующую сумму по всем перестановкам n символов:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad \text{Где } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Простейшие определители матриц:

Порядок 2×2 : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Порядок 3×3 : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$

3.3.4 Свойства определителей

- Определитель транспонированной матрицы равен определителю нормальной матрицы.

$\det A^T = \det A$. Доказательство заключается в том, чтобы выразить элемент A^T через элементы A :

$$\begin{aligned} \det A^T &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)}^T a_{2\sigma(2)}^T \cdots a_{n\sigma(n)}^T = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \{ \tau = \sigma^{-1}; |\tau| = |\sigma| \} = \\ &= \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det A \end{aligned}$$

- При домножении какой-либо строки/столбца на λ , определитель матрицы тоже увеличивается в λ раз.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство тривиально.

- Если каждый элемент одной строки/столбца разбит на сумму, то определитель матрицы разбивается на сумму определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Для доказательства рассмотрим левую часть:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \\ & = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} (a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a''_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}) = \\ & = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a''_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \det A_1 + \det A_2 \end{aligned}$$

(A_1, A_2 — матрицы правой части)

3.3.5 Частные случаи при вычислении определителя

Теорема 3.3.1. *Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю.*

Доказательство. Пусть в матрице A равны i -ая и j -ая строки. То есть $\forall k: a_{ik} = a_{jk}$. Пусть подстановка σ имеет вид $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$. Рассмотрим определитель этой матрицы. (У знака суммы снизу стоит переменная, которая варьируется, а сверху — количество вариантов перестановок).

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \\
& = \sum_{p_1, \dots, p_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1p_1} \cdots a_{np_n} = \sum_{p_1}^n \left(\sum_{\substack{p_2 \\ p_2 \neq p_1}}^{n-1} \left(\cdots \left(\sum_{p_n}^1 (-1)^{|\sigma|} a_{1p_1} \cdots a_{np_n} \right) \right) \right) = \\
& = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_n \\ \forall k: p_k \neq p_i \\ \forall k: p_k \neq p_j}}^{(n-2)!} \sum_{p_i, p_j}^{2!} (-1)^{|\sigma|} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = \\
& = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_n \\ \forall k: p_k \neq p_i \\ \forall k: p_k \neq p_j}}^{(n-2)!} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots \widehat{a_{ip_i}} \cdots \widehat{a_{jp_j}} \cdots a_{np_n} \sum_{p_i, p_j}^{2!} (-1)^{|\sigma|} a_{ip_i} a_{jp_j}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим отдельно получившуюся сумму по p_i и p_j . Всего существует только две подстановки, которые затрагивают i -ый и j -ый элементы (остальные элементы не важны, так как они меняются во внешней сумме). Обозначим их за σ_1 и σ_2 (заметим, что они отличаются на одну транспозицию). Тогда имеем следующие соотношения:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & \alpha & \cdots & \beta & \cdots \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & \beta & \cdots & \alpha & \cdots \end{pmatrix}, \quad (-1)^{|\sigma_1|} = -(-1)^{|\sigma_2|}$$

Тогда раскроем внутреннюю сумму:

$$\sum_{p_i, p_j}^2 (-1)^{|\sigma|} a_{ip_i} a_{jp_j} = (-1)^{|\sigma_1|} a_{i\alpha} a_{j\beta} + (-1)^{|\sigma_2|} a_{i\beta} a_{j\alpha} = (-1)^{|\sigma_1|} (a_{i\alpha} a_{j\beta} - a_{i\beta} a_{j\alpha}) = 0$$

Так как $\forall \alpha, \beta: a_{i\alpha} = a_{j\alpha}$, $a_{i\beta} = a_{j\beta}$ (по условию, i -ая и j -ая строки равны), то внутренняя сумма равна нулю, а значит и внешняя равна нулю, так как одним из множителей каждого слагаемого является внутренняя сумма, равная нулю. $\square$

Теорема 3.3.2. Если в матрице поменять местами две строки, то определитель поменяет знак.

Доказательство. Пусть начальная матрица — A , и в ней поменяли местами i -ую и j -ую строки и получили матрицу $\tilde{A}$. Тогда имеют место следующие соотношения;

$$\begin{cases} \det A & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ \det \tilde{A} & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{cases}$$

Пусть подстановка σ имеет такой вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_i & \cdots & p_j & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

Тогда введем подстановку τ :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_j & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

То есть подстановку, отличающуюся от σ транспозицией (ij) . Из этого следует, что $|\sigma| = -|\tau|$. Ясно, что количество всевозможных σ и τ совпадает, так как существует взаимоднозначное соответствие между ними. То есть нет разницы, суммировать по всем σ или по всем τ . Заменяем тогда в $\det \tilde{A}$ подстановку:

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\tau} (-1)(-1)^{|\tau|} a_{1\tau(1)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} = -\det A \end{aligned}$$

□

Теорема 3.3.3. *Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо ее строке прибавить другую строку, умноженную на λ .*

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i1} + \lambda a_{j1}) & (a_{i2} + \lambda a_{j2}) & (a_{i3} + \lambda a_{j3}) & \cdots & (a_{in} + \lambda a_{jn}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad \underbrace{= 0 \text{ (п. 3.3.1, стр. 103)}}
\end{aligned}$$

□

3.3.6 Треугольная матрица

Треугольной матрицей называется матрица, имеющая следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$, так как существует единственная (диагональная) подстановка, которая не содержит нулевых элементов.

Любую матрицу можно привести к треугольному виду. Для этого ищем строку с ненулевым первым элементом (если такой нету, то определитель матрицы равен нулю), переставляем ее с первой строкой. Далее из каждой следующей строки вычитаем первую, помноженную на отношение первых элементов, то есть: $a_{i1} \rightarrow a_{i1} - a_{11} \frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Таким образом, в первом столбце все элементы, кроме первого, будут нулевыми. Аналогичным образом преобразуем второй столбец, чтобы все элементы, начиная с третьего, были нулевыми. Таким образом, получим треугольную матрицу.

3.3.7 Разложение определителя по строке или столбцу

Лемма 3.3.4 (Об определителе блочной матрицы). Пусть задана матрица размером $n \times n$ следующего вида:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline * & B \end{array} \right)$$

$k \times k$ $(n-k) \times (n-k)$

A, B — некоторые подматрицы;

$*$ — произвольные элементы;

0 — нулевые элементы.

Тогда выполняется следующее равенство:

$$\det M = \det A \cdot \det B$$

Доказательство. Распишем $\det M$:

$$\det M = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{k\sigma(k)} m_{(k+1)\sigma(k+1)} \cdots m_{n\sigma(n)}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Можно считать, что $i_1, \dots, i_k \leq k$, иначе соответствующее слагаемое равно нулю ($m_{st} = 0$ при $1 \leq s \leq k$ и $t > k$; m_{st} попадает в «нулевой» блок). Из этого следует, что множества $\{i_1, \dots, i_k\}$ и $\{1, \dots, k\}$ совпадают. Аналогично, $\{i_{k+1}, \dots, i_n\} \equiv \{k+1, \dots, n\}$. Тогда подстановку σ можно считать составленной из двух подстановок σ_1 и σ_2 :

$$\sigma = (\sigma_1 | \sigma_2), \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} k+1 & \cdots & n \\ i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $|\sigma| = |\sigma_1| + |\sigma_2|$, так как для любых $\alpha \leq k$, $k < \beta \leq n$: $i_\alpha < i_\beta$ (в силу предположения, что $i_1, \dots, i_k \leq k$).

Тогда определитель матрицы M запишется следующим образом (a_{ij} — элементы подматрицы A , b_{ij} — B):

$$\begin{aligned} \det M &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2} (-1)^{|\sigma_1| + |\sigma_2|} a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} \cdots a_{k\sigma_1(k)} b_{(k+1)\sigma_2(k+1)} b_{(k+2)\sigma_2(k+2)} \cdots b_{n\sigma_2(n)} = \\ &= \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} (-1)^{|\sigma_1|} (-1)^{|\sigma_2|} [a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} \cdots a_{k\sigma_1(k)}] [b_{(k+1)\sigma_2(k+1)} b_{(k+2)\sigma_2(k+2)} \cdots b_{n\sigma_2(n)}] = \\ &= \{ \text{Выносим из-под знака суммы по } \sigma_2 \text{ множители, от } \sigma_2 \text{ не зависящие} \} = \\ &= \sum_{\sigma_1} (-1)^{|\sigma_1|} [a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} \cdots a_{k\sigma_1(k)}] \sum_{\sigma_2} (-1)^{|\sigma_2|} [b_{(k+1)\sigma_2(k+1)} b_{(k+2)\sigma_2(k+2)} \cdots b_{n\sigma_2(n)}] = \\ &= \left[\sum_{\sigma_1} (-1)^{|\sigma_1|} a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} \cdots a_{k\sigma_1(k)} \right] \left[\sum_{\sigma_2} (-1)^{|\sigma_2|} b_{(k+1)\sigma_2(k+1)} b_{(k+2)\sigma_2(k+2)} \cdots b_{n\sigma_2(n)} \right] = \\ &= \det A \cdot \det B \end{aligned}$$

□

Теперь рассмотрим определитель матрицы размером $n \times n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Такое разложение можно получить, представив i -ую строку в виде суммы:

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, 0, \cdots, 0) + (0, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{in}) =$$

$$= (a_{i1}, 0, 0, \cdots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \cdots, 0) + (0, 0, a_{i3}, \cdots, a_{in}) =$$

$$= (a_{i1}, 0, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, 0, 0, \cdots, a_{in})$$

Теперь в правой части из каждого определителя вынесем элемент i -ой строки:

$$\cdots = a_{i1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{i2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теперь будем менять местами столбцы, передвигая j -ый столбец (с единицей в i -ой строке) на первое место. При этом знак определителя изменится $(i-1) + (j-1)$ раз. Таким образом:

$$\begin{aligned}
& \dots = (-1)^{(i-1)+(1-1)} \cdot a_{i1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & \boxed{a_{12} \ \dots \ a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{a_{i1}} & \widehat{a_{i2}} & \dots & \widehat{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{(i-1)+(2-1)} \cdot a_{i2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & \boxed{a_{11} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{a_{i2}} & \widehat{a_{i1}} & \widehat{a_{i3}} & \dots & \widehat{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\
& \dots + (-1)^{(i-1)+(n-1)} \cdot a_{in} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1n} & \boxed{a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{a_{in}} & \widehat{a_{i1}} & \widehat{a_{i2}} & \dots & \widehat{a_{i(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} = \dots
\end{aligned}$$

Назовем *минором* i -ой строки и j -ого столбца определитель матрицы, полученный «вычеркиванием» i -ой строки и j -ого столбца (обозначим за M_{ij}). По лемме о блочной матрице (п. 3.3.4, стр. 106) разложим определители в полученном выражении. Также заметим, что если к степени (-1) прибавить двойку, то ничего не изменится. Таким образом, заменяя соответствующие определители минорами, получаем.

$$\dots = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot M_{i2} + \dots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot M_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \dots$$

Назовем выражение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ *алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} . Тогда окончательно получаем формулу разложения определителя матрицы по строке:

$$\Delta = \dots = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Можно легко получить связь миноров и алгебраических дополнений: знаки $+$ и $-$, расставленные в матрице, будут образовывать шахматную сетку:

+	−	+	−	...
−	+	−	+	...
+	−	+	−	...
−	+	−	+	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Пример. Разложим определитель матрицы по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ a & b & c & d \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = a \cdot A_{21} + b \cdot A_{22} + c \cdot A_{23} + d \cdot A_{24}$$

Вычислим A_{2i} :

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 = 2$$

Таким образом,

$$\Delta = 3a + 3b + 9c + 2d$$

С разложением по строке связана следующая лемма:

Лемма 3.3.5. Если в разложении матрицы по i -ой строке вместо элементов i -ой строки взять элементы j -ой строки, то получится нуль.

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \Delta$$

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0$$

Доказательство.

$$\Delta = a_{j1} \cdot A_{j1} + \dots + a_{jn} \cdot A_{jn}$$

Так как A_{ji} не зависит от элементов j -ой строки, то можно «подставить» на j -ую строку элементы i -ой:

$$\Delta' = a_{i1} \cdot A_{j1} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn}$$

А $\Delta' = 0$, так как в матрице получились две одинаковые строки (п. 3.3.1, стр. 103). Значит, равенство верно. $\square$

3.3.8 Определитель произведения матриц

Теорема 3.3.6. *Определитель произведения двух квадратных матриц размера $n \times n$ равен произведению определителей.*

$$C = AB \quad \Rightarrow \quad \det C = \det A \det B$$

Доказательство. Из определения операции умножения следует:

$$c_{ij} = \sum_k^n a_{ik} b_{kj}$$

Определитель же матрицы C , по определению, равен:

$$\det C = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \dots c_{n\sigma(n)}$$

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Введем для элементов матрицы C индекс суммирования: k -ый элемент i -ой строки матрицы C — это $c_{ik} = \sum_{j_k}^n a_{ij_k} b_{j_k k}$ (индекс суммирования — j). Тогда:

$$\det C = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{|\sigma|} \left(\sum_{j_1} a_{1j_1} b_{j_1 i_1} \right) \left(\sum_{j_2} a_{2j_2} b_{j_2 i_2} \right) \dots \left(\sum_{j_n} a_{nj_n} b_{j_n i_n} \right) = \dots$$

Все суммы по j можно объединить в одну, последовательно объединяя соседние скобки $((\sum_a x_a) (\sum_b y_b) = \sum_{a,b} x_a y_b)$:

$$\dots = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{|\sigma|} \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{1j_1} b_{j_1 i_1} \cdot a_{2j_2} b_{j_2 i_2} \dots a_{nj_n} b_{j_n i_n} = \dots$$

Внесем также (-1) под знак суммы и поменяем порядок суммирования: внешнее по i , а внутреннее по j .

$$\dots = \sum_{j_1, \dots, j_n} \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1j_1} b_{j_1 i_1} \cdot a_{2j_2} b_{j_2 i_2} \dots a_{nj_n} b_{j_n i_n} = \dots$$

Теперь вынесем из-под внутренней суммы a_{kj_k} , так как они не зависят от i_k .

$$\cdots = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{|\sigma|} b_{j_1 i_1} b_{j_2 i_2} \cdots b_{j_n i_n}}_{= \det \tilde{B}} = \cdots$$

$\tilde{B}$ — это матрица, полученная из матрицы B путем некоторых перестановок строк:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{j_1 1} & \cdots & b_{j_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j_n 1} & \cdots & b_{j_n n} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что если все j различны (то есть не существует таких α и β , что $j_\alpha = j_\beta$), то можно задать перестановку τ :

$$\exists \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Тогда $\det \tilde{B} = (-1)^{|\tau|} \det B$ (если четное число раз поменяли строки, то знак определителя остался прежним, а значит равен $\det B$; в противном случае — $-\det B$).

Если есть такие α и β , что $j_\alpha = j_\beta$, то тогда определитель матрицы $\tilde{B}$ равен нулю из-за одинаковых строк (п. 3.3.1, стр. 103).

Таким образом, можно считать, что все j различны, так как одинаковые j дают нулевое слагаемое, которое не влияет на окончательную сумму.

Тогда окончательно получаем:

$$\det C = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} (-1)^{|\tau|} \cdot \det B \stackrel{\text{def}}{=} \det A \det B$$

□

3.3.9 Обратная матрица

Определение. Обратной матрицей A^{-1} к матрице A называется такая матрица, что выполнено следующее равенство:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E, \quad \dim A = \dim A^{-1}$$

Где E — единичная матрица.

Замечание. Понятие обратной матрицы вводится в том случае, если элементы A — элементы некоторого поля.

Определение. Матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю и называется *невырожденной* в обратном случае.

Теорема 3.3.7. *Невырожденность матрицы является необходимым и достаточным условием для существования обратной матрицы.*

Необходимость. Доказательство проведем от обратного. Пусть B — обратная матрица к A и $\det A = 0$. Тогда, по определению, $AB = BA = E$. По теореме об определителе произведения (п. 3.3.8, стр. 111), имеем равенство:

$$\begin{aligned}\det AB = \det E &\Rightarrow \det A \det B = \det E \\ 0 \cdot \det B = 1 &\Rightarrow \det B = \frac{1}{0}\end{aligned}$$

Такого в поле быть не может, поэтому предположение неверно. $\square$

Достаточность. Для доказательства достаточности воспользуемся формулой обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} (см. п. 3.3.7, стр. 106).

Остается проверить, что эта матрица действительно является обратной к A . Обозначим произведение $AA^{-1} = X$. Тогда:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Найдем элементы x_{ij} :

$$\begin{array}{llll} x_{11} & = & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & = \det A \\ x_{12} & = & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n} & = 0 \\ & \cdots & & \cdots \\ x_{21} & = & a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n} & = 0 \\ x_{22} & = & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n} & = \det A \\ & \cdots & & \cdots \\ x_{n(n-1)} & = & a_{n1}A_{(n-1)1} + a_{n2}A_{(n-1)2} + \cdots + a_{nn}A_{(n-1)n} & = 0 \\ x_{nn} & = & a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \cdots + a_{nn}A_{nn} & = \det A \end{array}$$

Таким образом:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично проверяется и произведение $A^{-1}A$. □

Теорема 3.3.8. *Если существует обратная матрица, то она единственна.*

Доказательство. Пусть существуют различные две матрицы B_1 и B_2 , обратные к A . Рассмотрим произведение B_1AB_2 . В силу ассоциативности умножения матриц, имеем:

$$(B_1A)B_2 = B_1(AB_2) \Rightarrow EB_2 = B_1E \Rightarrow B_2 = B_1$$

Значит, они совпадают. Противоречие с тем, что $B_1 \neq B_2$. □

Обратная матрица легко вычисляется с помощью элементарных преобразований: будем приводить исходную матрицу к единичной, применяя одновременно те же преобразования к единичной матрице. В тот момент, когда их исходной мы получим единичную, из единичной мы получим обратную.

свободный член. Таким образом, из равенства выше получается, что $X = A^{-1}B$. Посчитав таким образом матрицу X , в i -ой строке будет значение i -ой неизвестной.

Пример.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-23} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{23} \\ \frac{17}{23} \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{27}{23} \\ y = \frac{17}{23} \end{cases}$$

3.4.2 Правило Крамера

Пусть дана СЛУ:

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Можно считать, что $\det A \neq 0$. Нулевой определитель матрицы коэффициентов означает, что система либо не имеет решений, либо их бесконечно много. Этот случай нужно рассматривать отдельно каждый раз.

Если же $\Delta = \det A \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение:

$$X = \frac{\text{adj } A}{\det A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Замечание. $\text{adj } A$ — дополнительная матрица к A ; транспонированная матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы A .

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Найдем i -ый элемент этой матрицы:

$$x_i = \frac{1}{\det A} (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n)$$

Выражение, стоящее в скобках, является разложением определителя матрицы A по i -ому столбцу, только вместо элементов этого столбца стоят элементы матрицы B . То есть, это определитель матрицы A с i -ым столбцом, замененным на матрицу B .

Правило Крамера формулируется следующим образом:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.4.3 Определитель Вандермонда. Интерполяция

Определитель Вандермонда $V(a_1, \dots, a_n)$ - определитель следующей матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Сделаем все элементы первого столбца, кроме самого первого, нулями. Для этого вычтем из n -й строки a_1 раз $n-1$ -ю, из $n-1$ -й — a_1 раз $n-2$ -ю и т.д. По схеме вычисления определителя блочной матрицы, определитель исходной матрицы равен определителю следующей матрицы

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_2 a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 & \cdots & a_n^2 - a_n a_1 \\ a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_2^2 & \cdots & a_n^3 - a_1 a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \cdots =$$

$$= \prod_{i>j} (a_i - a_j) \quad (3.1)$$

Этот определитель тесно связан с интерполяцией функций. Действительно, через любые $n+1$ точек обязательно проходит многочлен n -ной степени, причём только один (по двум точкам можно построить единственную прямую, проходящую через них, по трём — единственную параболу и т.п.)

Пусть у нас имеется набор из n точек (x_i, y_i) . Пусть искомым многочлен имеет вид

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Нам известно, что $\forall i \quad P(x_i) = y_i$. Запишем эти условия в виде системы (n уравнений,

3.5 Поля и кольца

*If you don't know where you are going, any
road will get you there.*

Lewis Carroll

3.5.1 Основные понятия

Определение. *Кольцо* — множество с двумя операциями (обозначим их условно "+" и "×"), в котором выполняются следующие аксиомы:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность)
3. $\exists 0: a + 0 = a$
4. $\forall a \exists b: a + b = 0$
5. $a(b + c) = ab + ac$ и $(b + c)a = ba + ca$

Определение. *Поле* — множество с двумя операциями, в котором выполняются аксиомы 1-5 и добавляются следующие:

6. $ab = ba$
7. $a(bc) = (ab)c$
8. $\exists 1 \neq 0 \forall a a \cdot 1 = a$
9. $\forall a \neq 0 \exists b a \cdot b = 1$

Теорема 3.5.1. *Любое ассоциативное и коммутативное кольцо без делителей нуля вкладывается в поле.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}$ — ассоциативное коммутативное кольцо без делителей нуля. Это означает, что

$$ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

Для доказательства построим такое множество, состоящее из элементов кольца $\mathbb{K}$. Если данное множество с определёнными нами операциями будет являться полем, и будет существовать вложение $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$, то кольцо $\mathbb{K}$ будет вложено в это поле.

Рассмотрим множество пар (a, b) , $a, b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$. Пусть пары (a, b) и (c, d) эквивалентны, если $ad = bc$. Эквивалентные пары будем обозначать таким образом: $(a, b) \sim (c, d)$. Пусть $\mathbb{A}$ — множество всех таких пар. отождествим эквивалентные пары. Это значит, что

$$(a, b) \sim (c, d) \ \& \ (c, d) \sim (u, v) \Rightarrow (a, b) \sim (u, v)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} ad = bc \\ cv = du \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} adv = bcv \\ bcv = bdu \end{cases} \Rightarrow adv = bdu \Rightarrow av = bu$$

□

Обозначим $\overline{(a, b)}$ как класс всех пар (a_i, b_i) , эквивалентных между собой. Тогда пусть множество всех классов $\overline{A} = \{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in A\}$. Докажем, что это множество с указанными ниже операциями является полем, и в него будет вложено исходное кольцо $\mathbb{K}$.

На множестве $\overline{A}$ определим сложение двух классов:

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad + bc, bd)}$$

Далее будем обозначать класс или как $\overline{(a, b)}$, или как $\frac{a}{b}$. Тогда определение сложения примет привычный вид $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Покажем, что класс суммы остаётся неизменным при различном выборе складываемых пар в классах слагаемых.

Доказательство. Пусть $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$, $(a', b') + (c', d') = (a'd' + b'c', b'd')$. Иначе,

$$\begin{cases} ab' = ba' \\ cd' = dc' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab'dd' = dd'ba' \\ cd'bb' = dc'bb' \end{cases}$$

Сложим оба равенства:

$$\begin{aligned} ab'dd' + cd'bb' &= dd'ba' + dc'bb' \\ (ad + cb)b'd' &= (d'a' + c'b')bd \end{aligned}$$

Последняя строка означает не что иное, как $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$. □

Теперь определим операцию умножения двух классов как $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Необходимо теперь доказать корректность умножения, то есть что при различном выборе пар в классах $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ класс их произведения будет оставаться неизменным. Это доказательство аналогично вышеприведённому для сложения.

Для определённых нами операций сложения и умножения проверим аксиомы 1 – 9, то есть условие того, то $\overline{A}$ — поле.

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ (по определению)
2. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{s}{t} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{s}{t}\right)$

Доказательство. Рассмотрим правую и левую части. Если мы их равносильными преобразованиями приведём к равным выражениям, то доказательство будет завершено.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{s}{t} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{s}{t} = \frac{adt + bct + sbd}{bdt}$$

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{s}{t} \right) = \frac{a}{b} + \frac{ct + ds}{dt} = \frac{adt + bct + sbd}{bdt}$$

□

3. Класс $\overline{(0; a)}$ отождествим с нулём.

4. $\forall \frac{a}{b} \quad \exists \frac{-a}{b} : \quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$

5. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \frac{s}{t} = \frac{a}{b} \frac{s}{t} + \frac{c}{d} \frac{s}{t}$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству пункта 2. □

6. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ (по определению)

7. $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \frac{s}{t} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{s}{t} \right)$ (по определению)

8. Класс $\overline{(a, a)}$ отождествим с единицей.

9. Обратным к $\frac{a}{b}$ будет являться $\frac{b}{a}$.

Таким образом мы показали, что $\overline{A}$ с определёнными нами операциями является полем. $\overline{A}$ называется полем частных кольца $\mathbb{K}$.

Определим вложение $\varphi: a \rightarrow \frac{ax}{x}, \quad a \in \mathbb{K}, \quad \frac{ax}{x} \in \overline{A}$.

Это вложение сохраняет операцию: $a+b \xrightarrow{\varphi} \overline{((a+b)x, x)} = \overline{(ax+bx, x)} = \overline{(ax, x)} + \overline{(bx, x)}$ (аналогично проверяется для умножения) и разные элементы переходят в разные:

Доказательство. Пусть $a \rightarrow \frac{ab}{b}, \quad a' \rightarrow \frac{a'b}{b}$. Необходимо доказать, что при различных a и a' , $\frac{ab}{b}$ и $\frac{a'b}{b}$ также не совпадают. Докажем от противного. Пусть $a \neq a', \quad \frac{ab}{b} = \frac{a'b}{b}$. Последнее выражение означает, что $(ab, b) \sim (a'b, b)$ или $abb = a'bb$. Так исходное кольцо $\mathbb{K}$ без делителей нуля, то или $a = a'$, или $b = 0$. Но мы определили классы в множестве $\overline{A}$ так, что $b \neq 0$. Следовательно $a = a'$. Противоречие. □

Таким образом, мы построили такое множество $\mathbb{F} = \overline{A}$ из элементов $\mathbb{K}$ и определили на нём две операции таким образом, что множество с этими операциями является полем и показали такое отображение $\mathbb{K} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}$, что оно является вложением.

□

Пример. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ вложено в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

3.5.2 Кольцо многочленов

Существует две точки зрения на многочлен:

1. Функциональная. При этом многочлен понимается как функция $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. В этом случае два многочлена равны, если при всех x их значения совпадают. Например над полем $\mathbb{Z}_2$ многочлены $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = x^3$ равны между собой так как при каждом x из поля $\mathbb{Z}_2$ их значения также равны между собой.
2. Алгебраическая. Многочлен понимается как формальное выражение, набор коэффициентов. Многочлены равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.

Вторая формулировка, безусловно, сильнее первой в общем случае. Однако, если поле состоит из бесконечного количества элементов, то обе эти формулировки эквивалентны между собой.

Доказательство. Пусть $P(x) = Q(x)$ в функциональном смысле. Их разность обозначим за $E(x)$. Так как для любого a из поля, над которым мы рассматриваем эти многочлены, $P(a) = Q(a)$, то $E(a) = 0 \quad \forall a$. По теореме Безу если a_1 — корень многочлена, то он делится на одночлен $x - a_1$. $E(x) = (x - a_1)E_1(x)$. Но $E(x) = 0$ и для каждого элемента поля. Поэтому он представим в виде $E(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_i) \dots$. Из этого следует, что $\deg E(x) \geq y \quad \forall y \Rightarrow E(x) = 0$ в алгебраическом виде и $P(x) = Q(x)$ в алгебраическом виде. $\square$

В дальнейшем будем понимать равенство многочленов только в алгебраическом виде.

Введём следующие понятия:

Определение. Если $p(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow \begin{cases} \deg u = \deg p \\ \deg v = 0 \end{cases}$ или наоборот, то $p(x)$ — неприводимый.

Замечание. Над различными полями максимальная степень многочлена, являющегося неприводимым над этим полем, различна. Например над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ неприводимы только многочлены вида $ax + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, то есть многочлены только первой степени; над полем действительных чисел неприводимы многочлены первой степени и некоторые второй степени ($ax^2 + bx + c$ неприводим над $\mathbb{R}$, если $b^2 - 4ac < 0$). Над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ многочлены любой степени могут быть неприводимыми, например $x^9 + 2$ неприводим над этим полем.

Определение. Многочлен с целыми коэффициентами $a_n x^2 + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ называется примитивным, если $(a_0, \dots, a_n) = 1$.

Теорема 3.5.2 (Лемма Гаусса). *Произведение примитивных — примитивно.*

Доказательство. Пусть

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_k, \dots, a_0) = 1$$

$$Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad (b_l, \dots, b_0) = 1$$

Рассмотрим их произведение

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= a_k b_l x^{k+l} + (a_k b_{l-1} + a_{k-1} b^l) x^{k+l-1} + (a_k b_{l-2} + a_{k-1} b_{l-1} + a_{k-2} b_l) x^{k+l-2} + \dots + a_0 b_0 = \\ &= \sum_i^{k+l} c_i x^i, \quad c_i = \sum_{s+t=i} a_s b_t \end{aligned}$$

Предположим, что $P(x)Q(x)$ — не примитивный. Тогда все $c_i \vdots p$. Пусть a_i — первый, не делящийся на p , а b_j — последний, не делящийся на p . Тогда рассмотрим коэффициент при x^{i+j} :

$$c_{i+j} = a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} \dots + a_i b_j + \dots + a_{i+j} b_0 \quad (\text{с поправками, если } i > l \text{ или } j > k)$$

Тогда все слагаемые кроме $a_i b_j$ делятся на p , а само это слагаемое не делится на p . Значит $c_{i+j} \not\vdots p$. Противоречие. $\square$

Теорема 3.5.3. Если многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — примитивный (иначе вынесем наибольший общий делитель его коэффициентов и рассмотрим полученный многочлен; приводимость многочлена над $\mathbb{Q}$ не изменится, если его умножить или разделить на константу), и он приводим над $\mathbb{Q}$, но неприводим над $\mathbb{Z}$

$$f(x) = \underbrace{g(x) \cdot h(x)}_{\text{коэфф. из } \mathbb{Q}}$$

Приведём все коэффициенты в $g(x)$ и $h(x)$ к общему знаменателю, вынесем его и вынесем наибольший общий множитель коэффициентов в числителе.

$$f(x) = \frac{a}{b} \varphi(x) \cdot \frac{c}{d} \psi(x) = \frac{ac}{bd} \varphi(x) \psi(x), \quad \varphi(x), \psi(x) — \text{примитивные}$$

$$bd \cdot f(x) = ac \cdot \varphi(x) \psi(x)$$

По лемме Гаусса (п. 3.5.2) имеем, что $bd = ac$, $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$. То есть мы получили, что $f(x)$ приводим над $\mathbb{Z}$. Противоречие. $\square$

Теорема 3.5.4 (Критерий Эйзенштейна). Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$ и выполнены условия

1. $a_n \not\vdots p$
2. $a_i \vdots p \quad \forall i \neq n$
3. $a_0 \not\vdots p^2$

(p — некоторое простое число, хотя бы одно). Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ приводим над полем $\mathbb{Q}$ и равен

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) = \underbrace{(b_k x^k + \dots + b_0)(c_l x^l + \dots + c_0)}_{b_i, c_j \in \mathbb{Z} \text{ по т. 3.5.3}}$$

Теперь рассмотрим коэффициенты исходного многочлена, выраженные через коэффициенты $g(x)$ и $h(x)$: $a_0 = b_0 c_0$. Так как $a_0 \not\vdash p^2$ и $a_0 \vdash p$, то или $(b_0 \vdash p)$, или $(c_0 \vdash p)$. Пусть $b_0 \vdash p$. Рассмотрим $a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \Rightarrow b_1 \vdash p$ (т.к. $c_0 \not\vdash p$, $a_1, b_0 \vdash p$). Теперь рассмотрим $a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$. Отсюда следует, что $b_2 \vdash p$. И т.д. В итоге получаем, что все $b_i \vdash p \Rightarrow a_n \vdash p$. Противоречие. $\square$

3.5.3 Поле рациональных функций. Разложение на простейшие дроби

По описанному выше алгоритму построим поле частных кольца многочленов $\mathbb{F}[x]$. Двум многочленам $f(x)$ и $g(x)$ мы ставим в соответствие функцию $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Определение. $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется неправильной, если $\deg f \geq \deg g$

Утверждение (Алгоритм Евклида). Для любых многочленов $P(x)$ и $T(x) \neq 0$ существует пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ таких, что выполняется равенство $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$, $\deg R(x) < \deg T(x)$.

Теорема 3.5.5. *Всякую неправильную дробь можно представить в виде "многочлен + правильная дробь"*

Доказательство. Пусть $\frac{f(x)}{g(x)}$ — неправильная дробь. По предыдущему утверждению для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существует пара многочленов $u(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = u(x)g(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$. Тогда разделив обе части равенства на $g(x)$, получим, что $\frac{f(x)}{g(x)} = u(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$. $\frac{r(x)}{g(x)}$ — правильная, т.к. $\deg r(x) < \deg g(x)$. $\square$

Теорема 3.5.6. *Если дробь $\frac{f}{u \cdot v}$ — правильная и $(u, v) = 1$, то она представима в виде $\alpha/u + \beta/v$, где α/u и β/v — правильные дроби.*

Доказательство. Так как $(u, v) = 1$, то по следствию из алгоритма Евклида

$$\exists \gamma, \delta: \quad u\gamma + v\delta = 1$$

$$f = f\gamma u + f\delta v = u\gamma_1 + v\delta_1$$

Теперь приведём многочлены γ_1 и δ_1 к "правильному" виду. Сначала сделаем это для γ_1 : $\exists \xi, \gamma_2 \quad \gamma_1 = v\xi + \gamma_2$ (алгоритм Евклида). Тогда $f = u(v\xi + \gamma_2) + v\delta_1 = u\gamma_2 + v(\delta_1 + u\xi) = u\gamma_2 + v\delta_2$. Тем самым мы добились того, что $\deg \gamma_2 < \deg v$. Оказалось, что и $\deg \delta_2 < \deg u$:

$$v\delta_2 = f - u\gamma_2 \Rightarrow \deg(v\delta_2) = \deg(f - u\gamma_2) < \deg(uv)$$

$$\deg(v\delta_2) = \deg v + \deg \delta_2 < \deg(uv) = \deg u + \deg v$$

$$\deg \delta_2 < \deg u$$

Отсюда следует, что $\frac{f}{uv} = \frac{\delta_2}{u} + \frac{\gamma_2}{v}$, причём доказано, что эти дроби правильные. $\square$

Определение. Простейшая дробь — дробь вида $\frac{f(x)}{p(x)^m}$, где $p(x)$ — неприводимый и $\deg f < \deg p$.

Теорема 3.5.7. *Всякую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших.*

Доказательство. Нам известно, что дробь $\frac{f}{g}$ — правильная. Разложим g на неприводимые множители $\frac{f}{g} = \frac{f}{p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}}$, $(p_i, p_j) = 1 \quad \forall i, j$. Пусть $p_1^{m_1} = u$, а $p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k} = v$, тогда так как $(u, v) = 1$, то она раскладывается в сумму двух правильных дробей. Повторяем такую операцию до тех пор, пока каждая дробь из суммы не примет вид $\frac{f_i}{p_i^{m_i}}$, причём нам известно, что $\deg f_i < m_i \cdot \deg p_i$. Каждую из этих дробей, в свою очередь, мы можем разложить в сумму: разделим f на p^{m-1} : $f = p^{m-1} \cdot t + r$, $\deg r < \deg p^{m-1}$, $\deg t < \deg p$. То есть $\frac{f}{p^m} = \frac{t}{p} + \frac{r}{p^{m-1}} = \dots$ (повторяем то же самое с дробью $\frac{r}{p^{m-1}}$, тем самым добиваемся, чтобы все дроби являлись простейшими). Мы получили требуемое разложение. $\square$

Вопросы к экзамену №2 за 1 полугодие 11 класса

1. Первообразная функции. Общий вид первообразных.
2. Неопределённый интеграл и его свойства. Линейная замена.
3. Дифференциал функции и его свойства.
4. Замена переменных в неопределённом интеграле.
5. Интегрирование по частям.
6. Интегрирование рациональных функций.
7. Определённый интеграл. Ограниченность интегрируемой функции.
8. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
9. Линейность интеграла. Аддитивность интеграла.
10. Суммы Дарбу и их свойства.
11. Критерий интегрируемости функции.
12. Теорема Гейне–Бореля о покрытии отрезка интервалами.
13. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
14. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
15. Теорема о среднем.
16. Теорема Ньютона–Лейбница.
17. Гиперболические функции.
18. Вывод канонических уравнений эллипса, гиперболы и параболы.
19. Оптические свойства кривых второго порядка.
20. Гиперболический поворот.
21. Перспективная проекция и её свойства. Проективная плоскость. Конечные проективные плоскости.
22. Однородные координаты.
23. Выполнимость аксиом проективной геометрии.
24. Модели проективной геометрии.
25. Проективные преобразования. Определяемость образами 4 точек.
26. Теорема Дезарга. Построение направления на недоступную вершину угла.
27. Теорема Паша.
28. Проективное пространство.

3.6 Первообразная и интеграл

It would be better for the true physics if there were no mathematicians on earth.

Daniel Bernoulli

3.6.1 Определение первообразной и интеграла

Определение. Первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$ называется функция $F: F' = f$.

Теорема 3.6.1 (Об общем виде всех первообразных функции). Если $F_1(x), F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$, то $\exists \text{const}: F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$ (т.е. две любые первообразные функции различаются на постоянную величину).

Доказательство.

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow F_1'(x) = F_2'(x) \Rightarrow F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Rightarrow (F_1 - F_2)'(x) = 0$$

Остается доказать, что если производная функции равна нулю на всем множестве возможных значений, то эта функция — постоянная.

Докажем, что $\forall x \in (a; b): f'(x) = 0 \Rightarrow f = \text{const}$ на $(a; b)$. Для этого применим теорему Лагранжа. Она показывает нам, что

$$\exists c \in (a; b): f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$$

Если $\forall c \in (a; b) \quad f'(c) = 0$, то $\forall x_1, x_2 \in (a; b) \quad f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const}$. □

Определение. Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется семейство всех её первообразных.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

3.6.2 Таблица некоторых первообразных

$f(x)$	$x^\alpha, \alpha \neq 1$	a^x	$\cos x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$F(x)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\sin x$	$\ln x $	$\arcsin x$	$\operatorname{arctg} x$
$f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\ln x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$	$\operatorname{arctg} x$
$F(x)$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\ln \sin x $	$x(\ln x - 1)$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + A})$	$x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

О методах нахождения первообразных функций будет рассказано чуть позже

3.6.3 Основные свойства

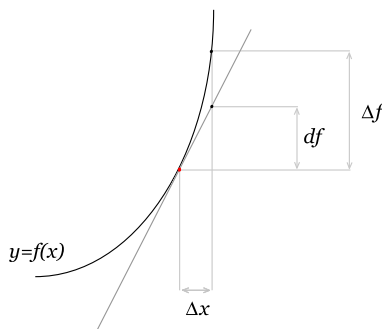
1. $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
2. $\int \lambda f dx = \lambda \int f dx$
3. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

3.6.4 Дифференциал

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 : $f'(x_0) = A \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$. Иначе это можно записать так: $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(\Delta x)$. Обозначив числитель за Δf и избавившись от знаменателя имеем

$$\Delta f = \underbrace{A \cdot \Delta x}_{\text{главная линейная часть приращения}} + o(\Delta x)$$

Величина $df = f'(x_0) \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции f в точке x_0 при заданном Δx . При малых Δx $\Delta f \approx df$, что используется в методах приближённого вычисления.



Пример. Необходимо приближённо вычислить $\operatorname{tg} 46^\circ$.

$$\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 1^\circ) \approx \operatorname{tg} 45^\circ + \frac{1}{\cos^2 45^\circ} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} \approx 1.035$$

3.6.5 Свойства дифференциала. Таблица дифференциалов.

Свойства дифференциала совпадают со свойствами производной и доказываются напрямую из них.

1. $d(u + v) = du + dv$
2. $d(Cu) = Cdu$
3. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$
5. $d(f(u)) = f'(u)du$

Существует также понятие второго дифференциала. По определению $f''(u) = \frac{d^2 f}{du^2}$ если u — независимая переменная. Если u — функция от другой переменной x , то $d^2 f = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u$. Это доказывается с помощью дифференциала сложной функции:

$$d^2(f) = d(df) = d(f'(u)du) = f'(u)d^2 u + du \cdot d(f'(u)) = f'(u)d^2 u + f''(u)du^2$$

Если u является независимой переменной, то слагаемое $f'(u)d^2 u$ равно 0, так как $d^2 u = d(\Delta u) = 0$. Если u — функция от независимой переменной x , то это неверно.

Таблица дифференциалов полностью совпадает с таблицей производных:

f	x^n	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\ln x$	e^x	$\dots$
df	$nx^{n-1}dx$	$\cos x dx$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{x}$	$e^x dx$	$\dots$

3.6.6 Методы интегрирования.

Теорема 3.6.2 (Метод замены переменных).

$$\text{Если } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. Для доказательства возьмём производную от правой части:

$$(F(\varphi(x)) + C)' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

□

Пример.

1.

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

2.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C$$

3.

$$\begin{aligned} \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx &= \left| t = \sqrt{1 + e^x}, \quad dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1} \right| = \\ &= \int \frac{(t^2) 2t^2 dt}{t^2 - 1} = \frac{2}{3} t^3 + C = \frac{2}{3} (e^x + 1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \left| x = 2 \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad dx = 2 \cos t dt \right| = \\ &= \int 4 \cos^2 t dt = 2t + \sin 2t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Теорема 3.6.3 (Интегрирование по частям).

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Доказательство. Пусть u и v — функции от независимой переменной x :

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx$$

Возьмём производную от правой части:

$$\left(uv - \int v du \right)' = (uv)' - vu' = uv'$$

□

Пример.

$$\int x \ln x dx = \left| u = x \ln x, \quad dv = dx \right| = x^2 \ln x - \int (x \ln x + x) dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - \int x \ln x dx$$

Пусть $I = \int x \ln x dx$. Тогда $2I = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$$

Теорема 3.6.4 (Метод разложения на простейшие дроби). *Интеграл от рациональной функции получается в конечном виде (выражается через элементарные функции).*

Доказательство. Необходимо доказать, что $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ интегрируема. Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная, то мы всегда можем привести её к правильному виду: $\frac{P(x)}{Q(x)} = U(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$. Интеграл от многочлена $U(x)$ существует, то есть необходимо проверить, берётся ли интеграл от правильных дробей. По доказанному ранее, любая правильная дробь раскладывается в сумму простейших. Задача свелась к доказательству существования интеграла от простейшей дроби. Рассмотрим все возможные виды простейших дробей над полем рациональных функций.

1.

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = \begin{cases} \frac{A(x-a)^{1-m}}{1-m} + C, & \text{если } m \neq 1 \\ A \ln |x-a| + C, & \text{если } m = 1 \end{cases}$$

2.

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = \int \frac{\widetilde{M}t + \widetilde{N}}{(t^2 + 1)^m} dt$$

Для вычисления этого интеграла нам необходимо уметь вычислять следующие интегралы:

а)

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + 1)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^m} = \frac{(t^2 + 1)^{1-m}}{1-m} + C$$

б)

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m}$$

Обозначим этот интеграл как I_m и докажем, что существует рекурсивная формула, позволяющая вычислять I_{m+1} через I_m . На этом доказательство теоремы завершится, так как I_1 существует и равен $\arctg u + C$.

$$\begin{aligned} I_m &= \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m} = \left| u = (t^2 + 1)^{-m}, \quad dv = dt \right| = \\ &= t(t^2 + 1)^{-m} + 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^{m+1}} = \\ &= t(t^2 + 1)^{-m} + 2m \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(t^2 + 1)^{m+1}} dt = \\ &= t(t^2 + 1)^{-m} + 2m \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m}}_{I_m} - 2m \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{m+1}}}_{I_{m+1}} \\ I_{m+1} &= \frac{2m-1}{2m} I_m + \frac{t(t^2 + 1)^{-m}}{2m} + C \end{aligned}$$

□

Пример.

$$\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)^2} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{(x-2)^2} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx$$

Найдём A , B и C . Для этого приведём обратно дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)}{x(x-2)^2}$$

По условию числитель равен $x+1$.

$$A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2) = x+1$$

Так как это равенство выполняется для всех x , то подставим в равенство различные x и найдём ответ:

$$1. \ x=2: \quad B = \frac{2}{3}$$

$$2. \ x=0: \quad A = \frac{1}{4}$$

$$3. \ x=\infty \text{ (условно)} : \quad A+C=0 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Тогда

$$\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+4x} dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{3}{2}(x-2)^{-1} - \frac{1}{4} \ln|x-2|$$

Замечание. Можно было решить задачу о нахождении коэффициентов и традиционным путём - раскрыть скобки и составить систему из трёх уравнений с тремя неизвестными из условия, что многочлены равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.

*I was more interested in skating and the girls
and traveling than I was in calculus.*

Scott Hamilton

3.7 Определенный интеграл

3.7.1 Определение интеграла

Определение. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная осью Ox , некоторой функцией и двумя вертикальными прямыми.

Определение. *Определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется площадь криволинейной трапеции под графиком $f(x)$.

Замечание. Необходимые условия интегрируемости функции: $f(x) > 0$ и $f(x)$ — непрерывная функция. Но первое из них можно убрать, определив, что если $f(x) < 0$, есть отрицательная площадь.

Определение. *Разбиением* T отрезка $[a; b]$ называется упорядоченный набор точек (x_n) , удовлетворяющий следующим условиям:

1. $x_0 = a$
2. $x_n = b$
3. $\forall i, j: i < j \Rightarrow x_i < x_j$

Определение. *Мелкостью* $\lambda(T)$ разбиения называется максимальное расстояние между двумя соседними точками.

Возьмем некоторый произвольный набор точек разбиения $\{\xi_i \mid \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]\}$. Возьмем некоторое разбиение T отрезка $[a; b]$. Тогда площадь криволинейной трапеции: $S = S_1 + \dots + S_n$, где S_i — тонкий «кусоч» криволинейной трапеции.

$$S_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$$

Итого, получаем:

$$S \approx \sum_i^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Данное выражение называется *интегральной суммой* или *суммой Римана*. Очевидно, что точное значение S — это предел этой суммы. Таким образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_i^n f(\xi_i)\Delta x_i$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall T \forall \{\xi_i\}: \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_i^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

3.7.2 Свойства интеграла

Простейшие свойства определенного интеграла:

$$1. \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство. Пусть интеграл $f - I_1$, $g - I_2$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1: \quad \forall T_1 \forall \{\xi_i\}: \lambda(T) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i - I_1 \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2: \quad \forall T_1 \forall \{\eta_i\}: \lambda(T) < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_i g(\eta_i) \Delta x_i - I_2 \right| < \varepsilon$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Рассмотрим интегральную $(f + g)$ для набора точек $\{\zeta_i\}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_i (f(\zeta_i) \Delta x_i + g(\zeta_i) \Delta x_i) - (I_1 + I_2) \right| &\leq \left| \left(\sum_i f(\zeta_i) \Delta x_i - I_1 \right) + \left(\sum_i g(\zeta_i) \Delta x_i - I_2 \right) \right| \leq \\ &\left| \left(\sum_i f(\zeta_i) \Delta x_i - I_1 \right) \right| + \left| \left(\sum_i g(\zeta_i) \Delta x_i - I_2 \right) \right| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

$$2. \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \text{ Если } f(x) = \text{const}, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot \text{const}$$

3.7.3 Ограниченность функции и аддитивность интеграла

Теорема 3.7.1. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на нем.

Доказательство. Пусть функция неограничена. Возьмем фиксированное разбиение T с набором точек $\{\xi_i\}$, сумма которого отличается от интеграла на фиксированное ε .

Тогда:

$$-\varepsilon < \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i - I < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{i \neq j} f(\xi_i)\Delta x_i - I < \varepsilon$$

$$-\varepsilon - \sum_{i \neq j} f(\xi_i)\Delta x_i + I < f(\xi_j)\Delta x_j < \varepsilon - \sum_{i \neq j} f(\xi_i)\Delta x_i + I$$

Возьмем:

$$M = \max \left(\left| -\varepsilon - \sum_{i \neq j} f(\xi_i)\Delta x_i + I \right|, \left| \varepsilon - \sum_{i \neq j} f(\xi_i)\Delta x_i + I \right| \right)$$

Тогда $|f| < \frac{M}{\Delta x_j}$. Получили, что в каждой точке f ограничена. Противоречие. $\square$

Теорема 3.7.2. Пусть $a < c < b$. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a; c]$ и на $[c; b]$. Тогда она интегрируема на $[a; b]$ и выполнено равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a; c]$ и $[c; b]$, то она ограничена на них, а значит ограничена и на $[a; b]$: $\forall x \in [a; b]: |f(x)| \leq M$. Обозначим $\int_a^c f(x) dx = I_1$, а $\int_c^b f(x) dx = I_2$. Тогда:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta_1 > 0: \quad \forall T_1 \forall \{\xi_i\}: \lambda(T_1) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_i^n f(\xi_i)\Delta x_i \right| - I_1 < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0: \quad \forall T_2 \forall \{\xi_j\}: \lambda(T_2) < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_j^n f(\xi_j)\Delta x_j \right| - I_2 < \varepsilon_2$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{3M})$. Возьмем любое разбиение T отрезка $[a; b]$ мелкостью меньше, чем δ с произвольными ξ_i . Тогда точка c обязательно попадет в некоторый отрезок $[x_{k-1}; x_k]$. Разобьем T на два разбиения:

$$T_1 = \{(a = x_0), x_0 < x_1, x_1 < x_2, \dots, x_{k-2} < x_{k-1}\}$$

$$T_2 = \{c < x_k, x_k < x_{k+1}, x_{k+1} < x_{k+2}, \dots, x_{n-1} < x_n\}$$

Возьмем точку $\xi'_k \in [x_{k-1}; c]$, обозначим $[x_{k-1}; c]$ за $\Delta x'_k$. Возьмем точку $\xi''_k \in [c; x_k]$, обозначим $[c; x_k]$ за $\Delta x''_k$.

Тогда рассмотрим интегральную сумму:

$$\begin{aligned}
\sigma &= f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + (f(\xi'_k)\Delta x'_k - f(\xi'_k)\Delta x'_k) + \\
&\quad + (f(\xi''_k)\Delta x''_k - f(\xi''_k)\Delta x''_k) + f(\xi_k)\Delta x_k + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\
&= \underbrace{f(\xi_1)\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(\xi'_k)\Delta x'_k}_{= I_1 \pm \varepsilon} + \underbrace{f(\xi''_k)\Delta x''_k + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n}_{= I_2 \pm \varepsilon} + \\
&\quad + f(\xi_k)\Delta x_k - f(\xi'_k)\Delta x'_k - f(\xi''_k)\Delta x''_k
\end{aligned}$$

Оценим данное выражение «сверху»: $\forall i: f(\xi_i) < M, \quad \Delta x_i < \delta$. Тогда:

$$\begin{aligned}
\sigma &= (I_1 + \varepsilon) + (I_2 + \varepsilon) + f(\xi_k)\Delta x_k - f(\xi'_k)\Delta x'_k - f(\xi''_k)\Delta x''_k < \\
&< (I_1 + I_2 + 2\varepsilon) + |f(\xi_k)\Delta x_k| + |f(\xi'_k)\Delta x'_k| + |f(\xi''_k)\Delta x''_k| < \\
&< (I_1 + I_2 + 2\varepsilon) + 3M\delta
\end{aligned}$$

Так как $\delta < \frac{\varepsilon}{3M}$ (мы ее такой выбрали), то:

$$\sigma < I_1 + I_2 + 3\varepsilon$$

Аналогично оценим выражение «снизу»:

$$\begin{aligned}
\sigma &= (I_1 - \varepsilon) + (I_2 - \varepsilon) + f(\xi_k)\Delta x_k - f(\xi'_k)\Delta x'_k - f(\xi''_k)\Delta x''_k > \\
&> (I_1 + I_2 - 2\varepsilon) - |f(\xi_k)\Delta x_k| - |f(\xi'_k)\Delta x'_k| - |f(\xi''_k)\Delta x''_k| > \\
&> (I_1 + I_2 - 2\varepsilon) - 3M\delta \\
\sigma &> I_1 + I_2 - 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Значит, $|\sigma - (I_1 + I_2)| < 3\varepsilon$. А значит, что $I = I_1 + I_2$. □

Замечание. $\forall f: \int_a^a f(x) dx = 0$

3.7.4 Ограниченная неинтегрируемая функция

Определим функцию Дирихле:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Данная функция ограничена ($|\mathcal{D}(x)| \leq 1$), но не интегрируема (например, на $[0; 1]$). Докажем это. Пусть $\mathcal{D}(x)$ интегрируема. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall T \forall \{\xi_i\}: \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_i^n \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

Берем $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Пусть существует «хорошая» δ . Выберем ξ_i рациональными числами. Тогда:

$$\sum_i^n \mathcal{D}(\xi_i) \Delta x_i - I = \sum_i^n 1 \cdot \Delta x_i - I = 1 - I$$

Значит, $|1 - I| < \varepsilon$.

Выберем ξ_i иррациональными числами. Тогда:

$$\sum_i^n \mathcal{D}(\xi_i) \Delta x_i - I = \sum_i^n 0 \cdot \Delta x_i - I = -I$$

Значит, $|-I| < \varepsilon$.

Тогда имеем систему:

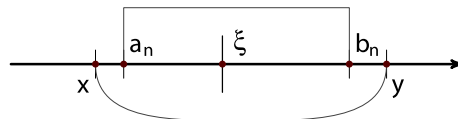
$$\begin{cases} 1 - I < \varepsilon \\ I < \varepsilon \end{cases}$$

Данная система не имеет решений, а значит $\mathcal{D}(x)$ неинтегрируема по Риману.

3.7.5 Теорема Гейне-Бореля

Теорема 3.7.3 (Гейне-Бореля). *Если отрезок покрыт интервалами, то можно взять конечный набор этих же интервалов так, чтобы он целиком покрывал отрезок (из покрытия можно выделить компактное подпокрытие).*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть нельзя выделить конечное подпокрытие. Построим последовательность вложенных отрезков Δ_i :



$$\Delta_1 = [a_1; b_1], \quad a_1 = a, \quad b_1 = b$$

Возьмем точку c — середину $[a_1; b_1]$. Тогда за Δ_2 обозначим ту половину $[a_1; b_1]$, которая не покрывается конечным набором интервалов.

$$\Delta_2 = [a_2; b_2], \quad a_2 \geq a, \quad b_2 \leq b$$

Так же строим последующие отрезки: каждый Δ_i не покрывается конечным набором интервалов (такие Δ_i всегда можно выбрать, так как, по предположению, весь отрезок не покрывается конечным набором). Получили последовательность вложенных отрезков:

$$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta_3 \subseteq \dots \subseteq \Delta_n$$

По принципу вложенных отрезков существует точка ξ , принадлежащая всем отрезкам:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \xi \leq b_n \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

Длина отрезка $[a_n; b_n]$ стремится к нулю (так как $\frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), поэтому a_n стремится к ξ слева, а b_n стремится к ξ справа:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1: \quad \forall n > n_1: \xi - a_n < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2: \quad \forall n > n_2: b_n - \xi < \varepsilon$$

Тогда $\xi \in U_\alpha$, где U_α — некоторый интервал из полного покрытия. Обозначим U_α как $(x_\alpha; y_\alpha)$. Возьмем $\varepsilon = \min(|\xi - x_\alpha|, |\xi - y_\alpha|)$. Тогда ε -окрестность точки ξ входит в U_α :

$$U_\alpha \supset (\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon)$$

Подбираем n_1 и n_2 для определения предела последовательности (a_n) и (b_n) и берем из них максимальный:

$$N = \max(n_1, n_2)$$

Тогда получим, что $a_n > \xi - \varepsilon$, а $b_n < \xi + \varepsilon$. Тогда отрезок $[a_n; b_n] \subseteq U_\alpha$ — то есть покрывается конечным числом интервалов. А по построению вложенных отрезков каждый из них не покрывается. Получили противоречие, а значит предположение неверно. $\square$

3.7.6 Равномерная непрерывность функций

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве M* , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x_1, x_2 \in M: |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Из равномерной непрерывности, очевидно, следует обычная непрерывность. Однако обратное не всегда верно.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна при $x \in (0; 1)$, но не является равномерно непрерывной на $(0; 1)$.

Если бы f была равномерно непрерывной, то выполнялось бы следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x_1, x_2 \in (0; 1): |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| < \varepsilon$$

Возьмем ε из $(0; 1)$, $x_1 = \varepsilon$ и $x_2 = \frac{\varepsilon}{100}$. Тогда должно выполняться:

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} - \frac{100}{\varepsilon} \right| < \varepsilon$$

Но при достаточно малых ε это неверно: $\frac{99}{\varepsilon} > \varepsilon$ уже при $\varepsilon < \sqrt{99} \approx 10$. А значит f не является равномерно непрерывной.

Теорема 3.7.4 (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она и равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. Возьмем произвольную точку c внутри $[a; b]$. Тогда, так как функция непрерывна на отрезке $[a; b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(c): \quad \forall x: |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Возьмем две окрестности точки c :

$$U_c = (c - \delta(c); c + \delta(c)), \quad V_c = \left(c - \frac{\delta(c)}{2}; c + \frac{\delta(c)}{2}\right)$$

Очевидно, что отрезок $[a; b]$ полностью покрывается интервалами V_c :

$$[a; b] \subseteq \bigcup_c V_c$$

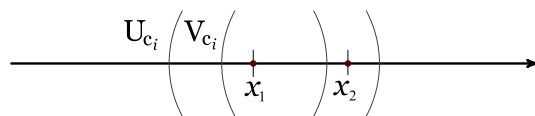
По теореме Гейне-Бореля (п. 3.7.3, стр. 139) можно выделить конечное подпокрытие из n интервалов $V_{c_1}, \dots, V_{c_n}$, где c_i — некоторая произвольная точка отрезка.

Далее возьмем число δ следующим образом:

$$\delta = \min \left(\frac{\delta(c_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(c_n)}{2} \right)$$

Проверим, что если $|x_1 - x_2| < \delta$ (δ та, что определена выше), то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Для этого возьмем точку x_1 . Она будет лежать в интервале V_{c_i} . Тогда x_2 обязательно попадет в U_{c_i} . Докажем это:



$$|x_2 - c_i| = |x_2 - x_1 + x_1 - c_i| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - c_i| < \frac{\delta(c_i)}{2} + \frac{\delta(c_i)}{2} = \delta(c_i) \quad \Rightarrow \quad x_2 \in U_{c_i}$$

Тогда, в силу непрерывности c_i имеем:

$$\begin{cases} |f(x_1) - f(c_i)| < \varepsilon \\ |f(x_2) - f(c_i)| < \varepsilon \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < 2\varepsilon$$

□

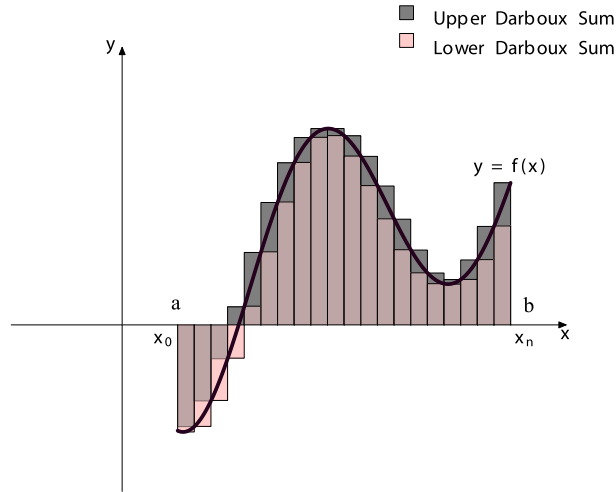
3.7.7 Суммы Дарбу

У нас есть интегральная сумма $\sigma(T, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с разбиением T и набором точек $\{\xi_i\}$. Введем тогда m_i и M_i — инфимум и супремум функции на i -ом отрезке:

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}; x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}; x_i]} f(x)$$

Тогда суммы Дарбу определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{S}_T = \sum_i^n M_i \cdot \Delta x_i & \text{Верхняя сумма Дарбу} \\ \underline{S}_T = \sum_i^n m_i \cdot \Delta x_i & \text{Нижняя сумма Дарбу} \end{cases}$$



Очевидно, что интегральная сумма заключена между ними.

$$\underline{S}_T \leq \sigma(T, \{\xi_i\}) \leq \bar{S}_T$$

Докажем следующие соотношения:

$$\bar{S}_T = \sup_{\{\xi_i\}} \sigma(T, \{\xi_i\}), \quad \underline{S}_T = \inf_{\{\xi_i\}} \sigma(T, \{\xi_i\})$$

Доказательство. Для каждого i -ого интервала выберем такую точку ξ_i , чтобы для некоторого числа ε выполнялось соотношение:

$$\forall i \exists \xi_i: f(\xi_i) > M_i - \varepsilon$$

Отсюда, домножая на Δx_i , получаем:

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i > M_i \cdot \Delta x_i - \varepsilon \cdot \Delta x_i$$

Суммируя по всем i , получаем:

$$\sigma(T, \{\xi_i\}) > \bar{S}_T - (b - a)\varepsilon$$

Отсюда видно, что $\bar{S}_T$ — супремум для σ (равенство выполняется для любого ε).

Аналогично доказывается и то, что $\underline{S}_T$ — инфимум для σ . $\square$

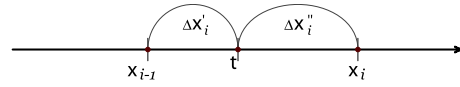
Определение. *Измельчение* — это разбиение, в которое входят все старые точки деления и новые.

Утверждение.

1. При измельчении T :
 - $\bar{S}_T$ не может увеличиться.
 - $\underline{S}_T$ не может уменьшиться.
2. $\forall T_1, T_2: \underline{S}(T_1) \leq \bar{S}(T_2)$

Докажем эти утверждения.

Доказательство утверждения 1. Достаточно доказать, что при добавлении одной точки $\bar{S}_T$ не увеличивается. Возьмем новое разбиение $T' = T \cup \{t\}$. Рассмотрим $\bar{S}_{T'}$ и $\bar{S}_T$.



$$\bar{S}_T = M_1\Delta x_1 + \cdots + M_i\Delta x_i + \cdots + M_n\Delta x_n$$

$$\bar{S}_{T'} = M_1\Delta x_1 + \cdots + M'_i\Delta x'_i + M''_i\Delta x''_i + \cdots + M_n\Delta x_n$$

Так как $M_i = \sup_{[x_{i-1}; x_i]} f(x)$, а $M'_i = \sup_{[x_{i-1}; t]} f(x)$ и $M''_i = \sup_{[t; x_i]} f(x)$, то $M_i \geq M'_i$ и $M_i \geq M''_i$. Отсюда получаем:

$$\bar{S}_{T'} = \cdots \leq \underbrace{M_1\Delta x_1 + \cdots + M_i\Delta x'_i + M_i\Delta x''_i + \cdots + M_n\Delta x_n}_{=\bar{S}_T} \Rightarrow \bar{S}_{T'} \leq \bar{S}_T$$

$\square$

Доказательство утверждения 2.

$$\exists T_3 = T_1 \cup T_2$$

Причем T_3 является измельчением и T_1 , и T_2 . Тогда, пользуясь первым утверждением, получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{S}_{T_1} \leq \underline{S}_{T_3} \\ \bar{S}_{T_2} \geq \bar{S}_{T_3} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S}_{T_1} \leq \bar{S}_{T_2}$$

$\square$

3.7.8 Критерий интегрируемости

Теорема 3.7.5. Пусть $f(x)$ ограничена на $[a; b]$. Тогда $f(x)$ интегрируема на данном отрезке тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S}_T - \underline{S}_T) = 0$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $I = \int_a^b f(x) dx$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall T \forall \{\xi_i\}: \lambda(T) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(T, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon$$

Берем любое разбиение T с мелкостью меньшей, чем δ . Рассмотрим $\bar{S}_T$: подбираем $\{\xi_i\}$ так, чтобы $\bar{S}_T < \sigma + \varepsilon$. Тогда имеем систему;

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_T < \sigma + \varepsilon \\ \sigma < I + \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{S}_T < I + 2\varepsilon$$

Аналогично получаем, что $\underline{S}_T > I - 2\varepsilon$. Таким образом, $\bar{S}_T - \underline{S}_T < 4\varepsilon$. $\square$

Доказательство. Достаточность. Дано, что $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S}_T - \underline{S}_T) = 0$. Надо доказать, что $\exists \int_a^b f(x) dx$. Доказательство проведем в три шага.

1. Ранее было доказано, что $\underline{S}_T \leq \bar{S}_{T_0}$. Зафиксируем T_0 и обозначим $\bar{S}_{T_0}$ как c . Тогда $\forall T: \underline{S}_T \leq c$. Значит, $\exists \sup \underline{S}_T \leq c$ (важно, что существует именно точная верхняя грань). Обозначим $\sup$ за $\underline{I}$ — нижний интеграл Дарбу. Отсюда получаем, что $\bar{S}_{T_0} \geq \underline{I}$. Это справедливо для любого разбиения T_0 . Значит, $\exists \inf \bar{S}_T \geq \underline{I}$. Обозначим инфимум за $\bar{I}$ — верхний интеграл Дарбу.

Очевидно, что $\underline{I} \leq \bar{I}$: $\underline{I}$ — точная верхняя грань множества значений нижней суммы Дарбу для различных разбиений, а $\bar{I}$ — точная нижняя грань для верхних сумм Дарбу. Ранее было доказано (п. 3.7.7, стр. 143), что $\underline{S}_{T_1} \leq \bar{S}_{T_2}$ для любых T_1 и T_2 . Значит, $\underline{I} \leq \bar{I}$.

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \sup_T \underline{S}_T \\ \bar{I} &= \inf_T \bar{S}_T \end{aligned}$$

2. Докажем, что $\underline{I} = \bar{I}$. Пусть $\underline{I} \neq \bar{I}$. Тогда $\bar{I} > \underline{I}$. Обозначим $\bar{I} - \underline{I} = \varepsilon > 0$. По условию разность между верхней и нижней суммами Дарбу меньше ε при мелкости разбиения меньше δ . То есть:

$$\varepsilon > \bar{S}_T - \underline{S}_T \geq \bar{I} - \underline{I} = \varepsilon$$

Получили противоречие: $\forall \varepsilon: \varepsilon > \varepsilon$.

3. Докажем, что $f(x)$ интегрируема. Пусть $\underline{I} = \bar{I} = I$. Проверим существование интеграла и его равенство I .

$$|\sigma(t, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon \text{ при } \lambda(T) < \delta$$

Дано:

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon \text{ при } \lambda(T) < \delta$$

Из этого следует:

$$\sigma \leq \bar{S}_T \leq \underline{S}_T + \varepsilon \leq I + \varepsilon$$

А также:

$$\sigma \geq \underline{S}_T \geq \bar{S}_T - \varepsilon \geq I - \varepsilon$$

Отсюда следует, что $\sigma \rightarrow I$. Таким образом, интегральная сумма существует, а значит существует и интеграл, который равен I .

□

Замечание. Доказанное выше существование интеграла при сходимости сумм Дарбу, тем не менее, позволяет интегрировать только определенный класс функций. Не все функции интегрируемы таким способом, который называется «интеграл Римана». Класс функций, соответственно, который интегрируется по Риману так и называется: «класс функций, интегрируемых по Риману». Существуют и другие теории интегрирования функций, которые позволяют интегрировать более широкий класс функций.

3.7.9 Интегрируемость функций

Теорема 3.7.6. *Непрерывная на отрезке функция интегрируема.*

Доказательство. Пусть дана функция $f(x)$. По теореме Кантора (п. 3.7.4, стр. 141) $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x_1, x_2 \in [a; b]: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Возьмем разбиение отрезка $[a; b] - T -$ мелкостью меньше, чем δ . Тогда:

$$\exists \xi_i: f(\xi_i) > M_i - \varepsilon$$

$$\exists \zeta_i: f(\zeta_i) < m_i + \varepsilon$$

(Так как M_i — супремум, а разность между супремумом и инфинумом меньше ε , поэтому разность между значением функции и супремумом тоже меньше ε)

Из этого получаем, что

$$M_i - m_i < (f(\xi_i) + \varepsilon) - (f(\zeta_i) - \varepsilon) = \underbrace{(f(\xi_i) - f(\zeta_i))}_{\leq \pm \varepsilon} + 2\varepsilon < (2 \pm 1) \varepsilon$$

То есть $M_i - m_i < c\varepsilon$. Домножим на Δx_i и просуммируем:

$$M_i \Delta x_i - m_i \Delta x_i < c\varepsilon \Delta x_i$$

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T < c(b - a)\varepsilon$$

Таким образом доказано, что при $\lambda(T) \rightarrow 0$ $\bar{S}_T - \underline{S}_T \rightarrow 0$.

□

Теорема 3.7.7. *Монотонная на отрезке функция интегрируема.*

Доказательство. Докажем для монотонно возрастающей функции, так как для доказательства для убывающей аналогично. Рассмотрим $\bar{S}_T - \underline{S}_T$:

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_i^n (M_i \Delta x_i - m_i \Delta x_i)$$

В силу монотонности функции $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$. Тогда:

$$\bar{S}_T - \underline{S}_T = \sum_i^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i = \{\forall i: \Delta x_i < \delta\} < \sum_i^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \delta = (f(b) - f(a)) \delta$$

Чтобы разность $\bar{S}_T - \underline{S}_T$ была меньше ε возьмем δ следующим образом:

$$\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Тогда очевидно, что $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$. □

Утверждение. Если f и g интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то также интегрируемы функции:

1. $(f + g), (f - g)$.
2. $\lambda f, f^2, |f|$
3. $fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$

3.7.10 Интегрирование неравенств

Теорема 3.7.8. *Пусть $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $f(x) \leq g(x) \forall x$. Тогда*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение $[a; b]$. Выберем $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. По условию

$$f(\xi_i) \leq g(\xi_i) \forall i$$

Домножим на $\Delta x_i (\Delta x_i > 0)$ и просуммируем по всем i :

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq g(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

□

Теорема 3.7.9. Если $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Доказательство. Теорема является частным случаем теоремы 3.7.8. □

Теорема 3.7.10 (Теорема о среднем). Пусть $m = \inf_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup_{[a;b]} f(x)$, $g(x) > 0$ и $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$. Тогда

$$\exists \mu \quad m \leq \mu \leq M: \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Пусть T — разбиение $[a; b]$, выберем $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. По условию

$$m \leq f(\xi_i) \leq M$$

Домножим на $g(\xi_i)$

$$m \cdot g(\xi_i) \leq f(\xi_i) \cdot g(\xi_i) \leq M \cdot g(\xi_i)$$

Суммируя по всем i , получаем

$$m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Разделим на $\int_a^b g(x) dx$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{=\mu}} \leq M$$

$$m \leq \mu \leq M$$

В случае, если $\int_a^b g(x) dx = 0$

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

□

Теорема 3.7.11 (Теорема Ньютона-Лейбница). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Определим $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Тогда:

1. Φ — первообразная для f
2. $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx$
3. $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ для любой первообразной

Доказательство.

1. *Доказательство.* Надо доказать, что $\Phi' = f$.

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \frac{f(x^*) \cdot \Delta x}{\Delta x} \rightarrow f(x)$$

(в силу непрерывности, $x^* \rightarrow x$) □

2. *Доказательство.*

$$\Phi(a) = 0$$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx$$

□

3. *Доказательство.* Пусть F — другая первообразная. Тогда $F(x) = \Phi(x) + C$.

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx$$

□

□

3.8 Эллиптические кривые второго порядка

Education is what remains after one has forgotten what one has learned in school.

A. Einstein

3.8.1 Эллипс

Определение. *Эллипс* — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами эллипса, постоянно.

Выведем уравнение эллипса в координатах. Введём систему координат таким образом, чтобы один фокус эллипса имел координаты $(c; 0)$, а другой — $(-c; 0)$. Возьмём точку M с текущими координатами $(x; y)$. Пусть эта точка принадлежит эллипсу. Тогда пусть $MF_1 + MF_2 = 2a$. В координатах это запишется следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Далее преобразуем это выражение.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4ax &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) называется каноническим уравнением эллипса. Из этого уравнения видно, что эллипс — фигура ограниченная ($|x| \leq a$, $|y| \leq b$) и симметричная относительно своего центра.

То, что мы действительно получили геометрическое место этих точек, надо проверить, указав, что все точки, удовлетворяющие уравнению, удовлетворяют условию, и все точки, не удовлетворяющие уравнению, не подходят под условие (необходимость и достаточность).

Теперь поясним равносильность переходов к выражениям (3.2), (3.3) и (3.4). Начнём с последнего: геометрически очевидно, что $a \geq c$, иначе эллипс не существовал бы или вырождался бы в точку. Тогда $a^2 - c^2 \geq 0$, и мы имеем право заменить это выражение на b^2 . Во втором случае мы имеем право возводить в квадрат, только при условии, что $a^2 \geq cx$.

Это следует из ограниченности эллипса ($-a \leq x \leq a$) и того, что $a \geq c$: $cx \leq ca \leq a^2$. Ну и наконец первый переход равносильно по тому же принципу:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 - 2cx + y^2 + c^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \sqrt{x^2 - 2cx + \underbrace{c^2 + b^2}_{=a^2} - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \\ &= \left| \underbrace{\frac{cx}{a}}_{>(-a)} - a \right| < |a + a| < 2a \end{aligned}$$

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются его вершинами. Эллипс имеет 4 вершины. Расстояния между вершинами эллипса, лежащими на одной оси симметрии, называются его осями, они равны $2a$ и $2b$, а их половины называются полуосями эллипса.

У эллипса существует следующее оптическое свойство — всякий луч, пущенный из одного фокуса, пройдет через второй фокус.

Доказательство. Пусть луч вышел из фокуса F_1 и отражается от эллипса в точке M . Отражась, этот луч должен пройти через фокус F_2 . Проведём касательную l к эллипсу в точке M . Тогда необходимо доказать, что

$$\angle(n, MF_1) = \angle(n, MF_2)$$

где $\vec{n}$ — вектор нормали к касательной, имеющий координаты $(-k; 1)$.

Воспользуемся формулами $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$ и выражением скалярного произведения через координаты. Но для этого нам надо знать координаты вектора $\vec{l}$, для которого нам надо знать уравнение касательной к эллипсу в точке $(x; y)$.

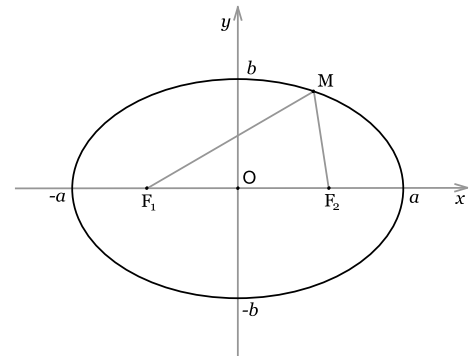
Найдём уравнение касательной к эллипсу в точке $(x; y)$. Запишем уравнение касательной в общем виде: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Теперь возьмём уравнение эллипса и продифференцируем его по x : $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$. Отсюда $k = y' = -\frac{xb^2}{ya^2}$. Подставив его в уравнение прямой дальнейшими преобразованиями приходим к виду

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Замечание. Мнемоническое правило нахождения касательной к кривым второго порядка: одни x и y в записи уравнения кривой теперь считаем координатами точки, в которой мы ищем касательную, а вторые x и y считаем новыми переменными. Например уравнение касательной к гиперболе в точке с координатами $(x; y)$ примет вид $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Тогда нам надо доказать, что

$$\frac{(x+c)k - y}{MF_1} = \frac{(x-c)k - y}{MF_2},$$



где k – тангенс угла наклона касательной, равный $-\frac{b^2x}{a^2y}$. Упростим выражение:

$$\frac{(x+c)k-y}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} = \frac{(x-c)k-y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}$$

Как мы уже показывали, знаменатели этих дробей равны соответственно $a+x\frac{c}{a}$ и $a-x\frac{c}{a}$. Дальнейшими преобразованиями приходим к тождеству. $\square$

Утверждение. Все эллипсы аффинно эквивалентны между собой.

Доказательство. Аффинное преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x' &= \lambda x \\ y' &= \mu y \end{cases}$$

$\square$

Утверждение. Середины параллельных сторон эллипса лежат на одной прямой с центром эллипса.

Доказательство. Эллипс аффинно эквивалентен окружности. Действительно, при $a = b$ уравнение эллипса переходит в уравнение окружности. В окружности вышесказанное утверждение верно. При аффинных преобразованиях прямая переходит в прямую и сохраняются отношения на параллельных отрезках. Следовательно, это утверждение верно и для эллипса. $\square$

3.8.2 Гипербола

Определение. *Гипербола* — геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами гиперболы, постоянен.

Проведём вывод, аналогичный выводу уравнения эллипса:

$$\begin{aligned} \left| \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{=MF_1} - \underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{MF_2} \right| &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a \\ 4cx &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &\dots \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Последнее уравнение называется каноническим уравнением гиперболы. Из него видно, что $|x| \geq a$, при $x \rightarrow \pm\infty$ $y \rightarrow \pm\frac{b}{a}$. После вывода этого уравнения нам опять надо

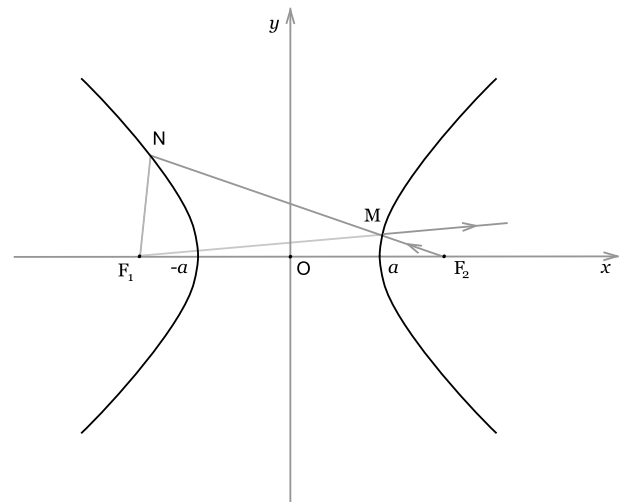
пояснить равносильность некоторых переходов. Из треугольника $\triangle NF_1F_2$ видно, что $c > a \Rightarrow cx - a^2 > 0$, а $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \geq 2a$ при $NF_2 \geq NF_1$ (то есть при $x < 0$) доказывается выделением под корнем полного квадрата.

Прямая, соединяющая фокусы гиперболы называется действительной полуосью, а перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка между фокусами — мнимой полуосью. У гиперболы есть две асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a}x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a}x - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) = ab \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}})} = 0$$

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ называются сопряжёнными. Их асимптоты совпадают, но они находятся в различных частях плоскости, на которые она разбита асимптотами.

Оптическое свойство гиперболы состоит в том, лучи, исходящие из одного фокуса, зеркально отражаясь от гиперболы, расходятся по направлениям лучей, исходящих из другого фокуса.



Доказательство. Пусть прямая $y = y$ пересекает гиперболу в точке (x, y) . Касательная к гиперболе в этой точке будет иметь уравнение, как было сказано выше, $\frac{xx}{a^2} - \frac{yy}{b^2} = 1$, то есть тангенс угла наклона касательной k равен $\frac{xb^2}{ya^2}$. Выберем на прямых по направляющему вектору и выразим косинус через скалярное произведение этих векторов. Вектор $\overrightarrow{F_1M}$ имеет координаты $(x + c; y)$, вектор $\overrightarrow{F_2M} = (x - c; y)$. Пусть вектор нормали к касательной имеет координаты $(-k; 1)$. Запишем косинусы углов между векторами используя выражения для вычисления скалярного произведения векторов:

$$\cos \alpha_1 = \frac{-k(x + c) + y}{|\vec{l}| |\overrightarrow{F_1M}|} \quad \cos \alpha_2 = \frac{-k(x - c) + y}{|\vec{l}| |\overrightarrow{F_2M}|}$$

То есть надо доказать равенство

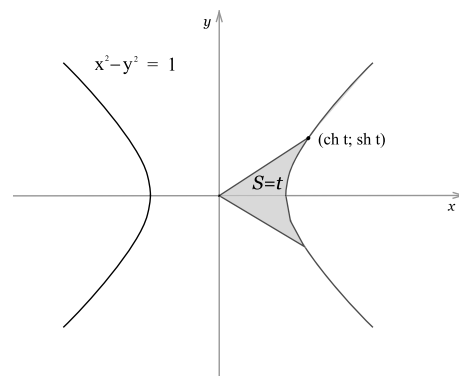
$$\begin{aligned} \frac{-k(x+c)+y}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} &= \frac{-k(x-c)+y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \\ \frac{-k(x+c)+y}{a+\frac{c}{a}x} &= \frac{-k(x-c)+y}{a-\frac{c}{a}x} \\ &\dots \end{aligned}$$

Дальнейшими преобразованиями приходим к тождеству. $\square$

3.8.3 Гиперболические функции

Гиперболические функции определены следующим образом. Геометрический смысл вы можете видеть на иллюстрации.

- $\operatorname{ch} t = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{sh} t = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
- $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$



Как видно, функция $\operatorname{sh} x$ – нечётная, а $\operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(-x)$. Пользуясь определением гиперболических функций можно показать, что $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, а также формулы 1–4 и другие формулы, имеющие аналог в тригонометрии.

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
2. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
3. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
4. $\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

График функции $y = \operatorname{ch} x$ в физике имеет название как „цепная линия“.

3.8.4 Гиперболический поворот

Покажем, что график функции $y = \frac{1}{x}$ – гипербола. Рассмотрим преобразование, поворачивающее наш график на 45° по часовой стрелке.

$$\begin{cases} x' &= x \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ \\ y' &= x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ \end{cases}$$

Подставив новые координаты каждой точки получаем, что из уравнения $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1$ мы перешли к уравнению $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$, которое является каноническим уравнением гиперболы.

Теперь рассмотрим все аффинные преобразования, переводящие гиперболу в себя. Пусть исходная гипербола задана уравнением $xy = C$. Общий вид аффинных преобразований выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x' &= \alpha x + \beta y + a \\ y' &= \gamma x + \delta y + b \end{cases}$$

Из этой системы выразим x и y .

$$\begin{cases} x &= \lambda x' + \mu y' + c \\ y &= \sigma x' + \rho y' + d \end{cases}$$

При подстановке в исходное уравнение получаем следующее выражение, которое по условию должно быть эквивалентно исходному:

$$(\lambda x' + \mu y' + c)(\sigma x' + \rho y' + d) = C.$$

Ясно, что $\lambda\sigma = 0$. То есть имеем систему, которую разобьём на 2 случая

1. $\lambda = 0, \quad \sigma \neq 0$

$$\begin{cases} \mu\rho &= 0 \\ c\sigma &= 0 \\ \mu d + c\rho &= 0 \\ \mu\sigma &= \frac{C - cd}{C} \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что общий вид преобразований, переводящих гиперболу в себя имеет вид

$$\begin{cases} x' &= \mu y \\ y' &= \frac{x}{\mu} \end{cases}$$

В этом случае преобразование заключается в последовательном применении преобразования симметрии и гиперболического поворота (смотри ниже). Определитель этого преобразования Δ равен -1 .

2. Второй случай рассматривается аналогично. Преобразование в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\lambda} x \\ y' &= \lambda y \end{cases}$$

Такое преобразование называется гиперболическим поворотом. Определитель этого преобразования Δ равен единице.

Определив ранее гиперболические функции, мы можем теперь записать формулу преобразования гиперболическим поворотом через них. Пусть преобразование, переводящее гиперболу $y = \frac{1}{x}$ в себя имеет вид

$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= \frac{y}{k}, \end{cases}$$

преобразование гиперболы $y = \frac{1}{x}$ в гиперболу, заданную в каноническом виде имеет вид

$$\begin{cases} X &= (x + y) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y &= (x - y) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Нам надо выразить X', Y' через X, Y . Выразим x и y из второй системы и подставим в первую; воспользуемся тем, что

$$\begin{cases} X' &= (x' + y') \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y' &= (x' - y') \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(очевидно) и получим следующее выражение:

$$\begin{cases} X' &= \frac{X}{\sqrt{2}} \left(k + \frac{1}{k}\right) + \frac{Y}{\sqrt{2}} \left(k - \frac{1}{k}\right) \\ Y' &= \frac{X}{\sqrt{2}} \left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{Y}{\sqrt{2}} \left(k + \frac{1}{k}\right) \end{cases}$$

Заметим, что $\frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 1$.

Докажем, что если $u^2 - v^2 = 1$, $u, v > 0$, то $\exists t$: $\operatorname{ch} t = u, \operatorname{sh} t = v$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = u &\Leftrightarrow e^{2t} - 2e^t u + 1 = 0 \Rightarrow e^t = u \pm \sqrt{u^2 - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \ln(u + v) &\Rightarrow \operatorname{sh}(\ln(u + v)) = \frac{(u + v) - \frac{1}{u+v}}{2} = v \end{aligned}$$

В переходе от $e^t = u \pm \sqrt{u^2 - 1}$ рассматриваем оба случая, и получаем, что подходит только один из них. t получается однозначно.

Поэтому можем заменить $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(k + \frac{1}{k}\right) = \operatorname{ch} t$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(k - \frac{1}{k}\right) = \operatorname{sh} t$.

Преобразование примет вид

$$\begin{cases} X' &= x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t \\ Y' &= x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t \end{cases}$$

3.8.5 Парабола

Определение. *Парабола* — геометрическое место точек, для которых расстояние до данной точки равно расстоянию до данной прямой. Указанная прямая называется директрисой параболы.

Выведем уравнение параболы. Пусть фокус параболы имеет координаты $(\frac{p}{2}; 0)$, прямая задаётся уравнением $x = -\frac{p}{2}$. Возьмём точку M с текущими координатами $(x; y)$. Если она принадлежит параболе, то выполняется равенство

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \quad (3.5)$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = 2px \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5) и (3.6) получены равносильными преобразованиями, поэтому уравнение (3.6), называемое каноническим уравнением параболы, задаёт на плоскости все точки, удовлетворяющие определению. Из него следует, что $x \geq 0$.

Оптическое свойство гиперболы состоит в том, что всякий луч, выпущенный из фокуса, отразившись, пойдёт параллельно оси симметрии параболы.

Доказательство. Парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$. Возьмём на параболе точку M с текущими координатами $(x; y)$. В этой точке уравнение касательной к параболе примет вид $yu = px + p$. Тогда нам опять надо показать равенство косинусов между векторами на прямом и отражённом луче и касательной.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right) + p}{\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}} & \cos \beta &= \cos \arctg k \\ &\Downarrow & & \\ &\frac{\left(x - \frac{p}{2}\right) + p}{\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}} = 1 & & \\ &1 \equiv 1 & & \end{aligned}$$

□

Для параболы верны следующие утверждения:

Утверждение. Все параболы аффинно подобны.

Доказательство. Преобразование подобия подразумевает под собой группу преобразований гомотетии и движения. Преобразование подобия будет иметь формулу

$$\begin{cases} x' - x_0 &= k(x - x_0) \\ y' - y_0 &= k(y - y_0) \end{cases}$$

Действительно, параболы $y = ax^2$ и $y = bx^2$, например, подобны с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$. □

Утверждение. Середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, параллельной оси параболы.

Доказательство. Пусть парабола задана уравнением $y = ax^2$, прямые – семейством уравнений $y = kx + b$. Приравняем, чтобы найти координаты x точек пересечения этих прямых с параболой: $ax^2 - kx - b = 0$. По теореме Виета видно, что $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2a} = \text{const}$, то есть координата x центра каждой хорды постоянна. $\square$

3.8.6 Приведение к каноническому виду кривой второго порядка

Пусть дана кривая, заданная однородным многочленом второй степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0 \quad (1)$$

Утверждение. Поворотом осей координат можно избавиться от одночлена, содержащего xy .

Доказательство. Пусть преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \\ y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \quad \Delta = 1$$

Подставим x и y в уравнение (1):

$$a_{11}(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)^2 + a_{22}(-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + 2a_{12}(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)(-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + 2a_1(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) + 2a_2(-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + a = 0$$

Рассмотрим коэффициент при $x'y'$:

$$-2a_{11} \sin \varphi \cos \varphi + 2a_{22} \sin \varphi \cos \varphi + 2a_{12}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ \text{ctg } 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Такой угол φ существует всегда, кроме $a_{12} = 0$, но в этом случае слагаемого xy не было изначально, следовательно поворот был не нужен.

То есть мы имеем право перейти к уравнению

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b = 0,$$

в котором выделяем полный квадрат (если коэффициенты при соответствующих многочленах не 0). После этого сдвигаем оси, чтобы мы перешли к уравнению вида

$$c_{11}x''^2 + c_{22}y''^2 + c = 0$$

При различных значениях c_{11} , c_{22} и c мы получаем или уравнение параболы, или уравнение эллипса, или уравнение гиперболы. $\square$

3.8.7 Общие свойства кривых второго порядка

И у эллипса, и у гиперболы есть директриса. Это и неудивительно, в проективной геометрии все эти фигуры эквивалентны. Директриса определяется уравнением $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$, где $e = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет кривой второго порядка. Если $e = 0$, то кривая второго порядка является окружностью, если $0 < e < 1$ — эллипсом, если $e = 1$ — параболой и, наконец, если $e > 1$, то кривая — гипербола.

Можно легко показать, что указанная прямая удовлетворяет условию, что расстояние до неё от любой точки кривой равно расстоянию до расстоянию до фокуса с координатами $(c; 0)$, умноженному на e ($\rho(d, M) = \rho(F_2, M)$).

3.9 Проективная геометрия

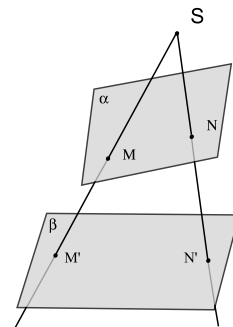
Projective geometry is all geometry.

Arthur Cayley

3.9.1 Перспективная проекция. Проективная плоскость.

Пусть даны две плоскости – α и β . Если задать точку S , не лежащую ни в одной из плоскостей, то можно центрально спроецировать точки одной плоскости на другую (см. рисунок справа).

Недостаток этого проецирования заключается в том, что оно не является отображением, так как не все точки в α имеют образ и не все точки в β имеют прообраз. Например, если $SM \parallel \beta$, то точка M не имеет образа, и наоборот, если $SM' \parallel \alpha$, то точка M' не имеет прообраза.



При перспективной проекции, за исключением случая, описанного выше, прямая всегда переходит в прямую. Пусть $\gamma = (SMN)$. Тогда $\gamma \cap \beta = M'N'$. Любая прямая, проходящая через точку S и точку $X \in MN$ лежит в плоскости γ . То есть $SX \cup M'N' = X' \neq \emptyset$.

Однако пучок пересекающихся прямых не всегда переходит в пучок пересекающихся прямых. Если прямые в плоскости α пересекаются в точке A , которая не имеет образа в β , то пучок пересекающихся прямых перейдёт в пучок параллельных прямых, каждая из которых параллельна SA .

Доказательство. Если A не имеет образа в β , то $SA \parallel \beta$. Пусть $l \subset \alpha$, $A \in l$. Введём плоскость $\gamma = (S, l)$. Пусть $\gamma \cap \beta = l'$. $SA, l' \subset \gamma$. Если бы $SA \nparallel l'$, то это означало бы, что точка A имеет проекцию в β , так как $l' \subset \beta$ □

Как мы показали, при проецировании в некоторых ситуациях может возникнуть такая ситуация, что пересекающиеся прямые переходят в параллельные. Устраним этот недостаток. Пусть параллельные прямые пересекаются.

Пусть H – евклидова (аффинная) плоскость. Добавим к ней некоторое множество точек, условно называемых *бесконечно удалёнными* – для каждого пучка параллельных прямых по одной точке. Будем считать, что эти прямые пересекаются в этой точке при их бесконечном продолжении в любую сторону. Для удобства будем считать, что все эти точки лежат на одной прямой, называемой *бесконечно удалённой прямой*. Новая плоскость $\bar{H}$ называется расширенной, или проективной плоскостью. Мы получили одну из моделей проективной геометрии. Далее мы рассмотрим ещё несколько моделей.

Данную модель проективной геометрии на плоскости можно было задать аксиоматически. При таком подходе вводится понятие инцидентности прямой и точки: говорят, что „ A инцидентна l “, если $A \in l$. Для этого понятия вводится первая группа аксиом (аксиомы инцидентности).

1. $\forall A, B \quad \exists l \mid A, B \in l$
2. Если $A \neq B$, то такая прямая l —единственна.
3. $\forall l, m \quad \exists A \mid A \in l, m$. Эта аксиома неверна для нерасширенной евклидовой плоскости.
4. $\exists A, B, C \quad A \notin BC$

На основании этих аксиом докажем, что если $a \cap b = M$, то такая точка M единственна. Если это было бы не так, то мы получили бы противоречие аксиомой 2.

Из этой группы аксиом вытекает следующее утверждение: если в каком-то утверждении / теореме заменить „прямые“ на „точки“ и наоборот, то истинность утверждения от этого не изменится. Это называется *принципом двойственности*.

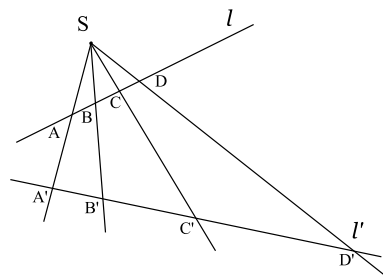
Можно легко показать, что заданная нами ранее расширенная плоскость удовлетворяет этим аксиомам. При этом „точка“ — или точка, или пучок параллельных прямых.

1. Для двух действительных точек это верно по аксиоме на евклидовой плоскости. Для двух бесконечно удалённых точек это верно, так как мы ввели бесконечно удалённую прямую. Для действительной и бесконечно удалённой точки это верно, так как для любой прямой существует прямая, параллельная ей и проходящая через заданную точку.
2. Опять же, это верно для двух действительных точек по Евклиду, для двух бесконечно удалённых точек, так как мы ввели всего одну бесконечно удалённую прямую и для одной действительной и одной бесконечно удалённой точке, так как соответствующее утверждение при доказательстве предыдущего пункта по Евклиду можно усилить.
3. Это верно для двух действительных пересекающихся прямых по Евклиду, для двух параллельных прямых и для действительной и бесконечно удалённой прямой у нас такая точка определена.
4. Достаточно просто привести пример для трёх действительных точек, не лежащих на одной прямой. Такие точки существуют по Евклиду.

Следующая группа аксиом называется аксиомами порядка. Вспомним что это означает в евклидовой плоскости. В ней для $\forall A, B, C \in l$ вводится понятие „ A лежит между B и C “. В частности в евклидовой геометрии существует аксиома Паша:

Пусть дан треугольник ABC . Если прямая l пересекает одну его сторону, то она пересекает хотя бы одну из двух других.

В проективной плоскости отношение „лежит между“ для 3 точек отсутствует, зато вводится отношение для 4 точек — при любом перспективном отображении (проективном преобразовании) сохраняется отношение „пара AB разделяет пару CD “ или нет. Если AB и CD не пересекались, то и $A'B'$ и $C'D'$ не пересекаются.



3.9.2 Однородные координаты

Однородные координаты вводятся следующим образом.

Пусть у нас есть аффинная система координат на плоскости, в которой каждая точка задаётся парой координат $(x; y)$. Пусть прямая на аффинной плоскости задана уравнением $y = kx + b$. Тогда координаты каждой точки на этой прямой будут иметь вид $(x; kx + b)$. Однородные координаты каждой действительной точки на этой прямой определятся как тройка чисел $(x; kx + b; 1)$ с точностью до пропорциональности, то есть координаты $(x; y; 1)$ и $(\lambda x; \lambda y; \lambda)$, $\lambda \neq 0$ обозначают одну и ту же точку. Бесконечно удалённая точка на прямой $y = kx + b$ в однородных координатах запишется как $(x; kx + b; 0)$. В тоже время тройка $(0; 0; 0)$ запрещается.

Легко видеть, как связаны аффинные координаты и однородные: если однородные координаты некоторой точки $(x_1; x_2; x_3)$, то аффинные координаты этой точки — $(\frac{x_1}{x_3}; \frac{x_2}{x_3})$. Понятно, что если $x_3 = 0$, то точка, как бы, уходит в бесконечность, так как можно считать, что $\frac{a}{0} = \infty$. Если прямая в аффинных координатах будет задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то в однородных координатах она будет задана уравнением $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. Аналогично в однородных координатах записываются уравнения всех остальных кривых.

3.9.3 Проективные преобразования

Проективные преобразования — это преобразования, задаваемые формулами

$$\begin{cases} \rho x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\ \rho x'_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \\ \rho x'_3 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \end{cases} \quad \rho \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Аффинные преобразования являются частным случаем проективных преобразований. Проективные преобразования удобно записывать в однородных координатах, но всегда можно перейти обратно к аффинным:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3} = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \\ y' = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3}{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3} = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + c_3} \end{cases}$$

Отсюда видно, что если в результате проективных преобразований мы получаем, что $x'_3 = 0$, то точка бесконечно удаленная.

Теорема 3.9.1 (Основная теорема о проективных преобразованиях). *A, B, C, D — четыре точки, причем любые три из них не лежат на одной прямой. A', B', C', D' — другие четыре точки, не лежащие на одной прямой. Тогда существует единственное проективное преобразование, переводящее $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C', D \rightarrow D'$.*

Замечание. Можно считать, что A, B, C, D и A', B', C', D' — обычные, не бесконечно удаленные точки. Если некоторые из этих точек бесконечно удаленные, то из набора (A, B, C, D) мы переведем бесконечно удаленные точки в обычные преобразованием α , из (A', B', C', D') — преобразованием β и осуществим преобразование φ между $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha)$ и $(A_\beta, B_\beta, C_\beta, D_\beta)$. Тогда, если существует преобразование φ , то существует и преобразование $\alpha\varphi\beta^{-1}$.

Доказательство. Можно работать в аффинной плоскости. Введем ось x через точки C и A , а ось y — через точки C и B . Известно, что существует аффинное преобразование, переводящее $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$. Применим его. Тогда $D \rightarrow D''$. Осталось доказать существование преобразования $D'' \rightarrow D'$. Очевидно, что оно уже не является аффинным. Запишем координаты точек A', B', C' в однородных координатах:

$$A' = (1 : 0 : 1)$$

$$B' = (0 : 1 : 1)$$

$$C' = (0 : 0 : 1)$$

Введем проективное преобразование T :

$$T: \rho \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Так как $A' \rightarrow A', B' \rightarrow B', C' \rightarrow C'$, то, записав преобразование для этих точек, получим (ρ_1, ρ_2, ρ_3 — постоянные коэффициенты в преобразованиях точек; не равны нулю):

$$\left\{ \begin{array}{l} A': \\ B': \\ C': \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = a_1 + a_3 \\ 0 = b_1 + b_3 \\ \rho_1 = c_1 + c_3 \\ 0 = a_2 + a_3 \\ \rho_2 = b_2 + b_3 \\ \rho_2 = c_2 + c_3 \\ 0 = a_3 \\ 0 = b_3 \\ \rho_3 = c_3 \end{array} \right.$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} a_1 = \rho_1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = \rho_2 \\ b_3 = 0 \\ c_1 = \rho_1 - \rho_3 \\ c_2 = \rho_2 - \rho_3 \\ c_3 = \rho_3 \end{cases}$$

Таким образом, матрица проективных преобразований имеет следующий вид:

$$T: \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ \rho_1 - \rho_3 & \rho_2 - \rho_3 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

Пусть точка D'' имеет координаты $(u : v : 1)$, а $D' = (p : q : 1)$. Тогда:

$$T * D'' = \begin{cases} \rho_4 p = \rho_1 u \\ \rho_4 q = \rho_2 v \\ \rho_4 = (\rho_1 - \rho_3)u + (\rho_2 - \rho_3)v + \rho_3 \end{cases}$$

Так как однородные координаты определены с точностью до пропорциональности, то можно считать, что $\rho_4 = 1$. Тогда:

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{p}{u} \\ \rho_2 = \frac{q}{v} \\ \rho_3 = \frac{p+q-1}{u+v-1} \end{cases}$$

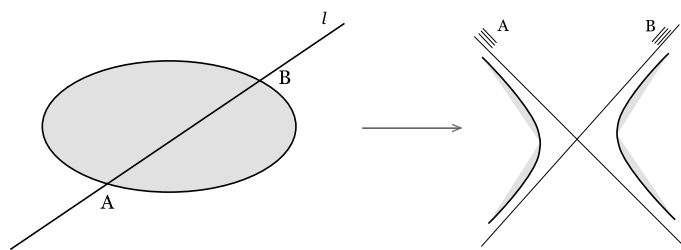
В полученных значениях ρ_i все знаменатели ненулевые, так как никакие три точки, по условию, не лежат на одной прямой, а значит D не лежит ни на введенной x (ρ_1), ни на y (ρ_2), ни на AB (ρ_3).

Итак, мы доказали существование и единственность преобразования $(A', B', C', D'') \rightarrow (A', B', C', D')$. Осталось доказать единственность преобразования $(A, B, C, D) \rightarrow (A', B', C', D'')$. Возьмем два других набора точек: (M, N, P, Q) и (M', N', P', Q') . Пусть существуют два преобразования ξ и η , переводящие (M, N, P, Q) в (A, B, C, D) и (A', B', C', D'') в (M', N', P', Q') . Пусть также существуют два преобразования α и β из (A, B, C, D) в (A', B', C', D'') . Тогда:

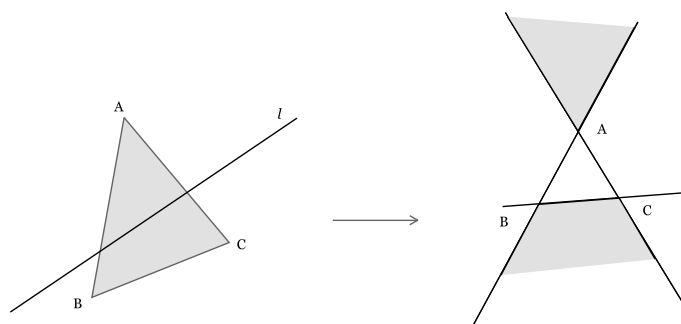
$$\xi\alpha\eta = \xi\beta\eta \Rightarrow \alpha\eta = \beta\eta \Rightarrow \alpha = \beta$$

□

Пример. Пусть дан эллипс; A, B — его точки. Тогда при переносе AB в бесконечность мы получим гиперболу, асимптоты которой пересекают бесконечно удаленную прямую в точках A и B .

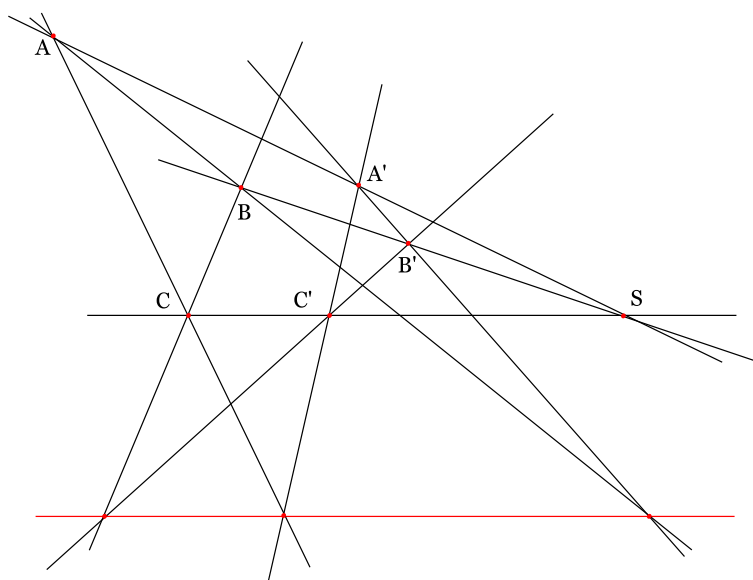


Пример. Пусть дан треугольник ABC , который пересекается прямой l . Перенесем эту прямую в бесконечность. Тогда получим следующую картину:



3.9.4 Теорема Дезарга

Теорема 3.9.2. Пусть есть три прямых, пересекающихся в одной точке S , а также два перспективных треугольника (то есть вершины лежат на этих прямых). Тогда точки пересечения AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ лежат на одной прямой.



Доказательство. Пусть AB пересекает $A'B'$ в точке N , а AC пересекает $A'C'$ в точке

M . Перенесем проективным преобразованием NM в бесконечность. Тогда получим, что $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$. Достаточно доказать, что $BC \parallel B'C'$ (тогда $P = BC \cup B'C' \rightarrow \infty$, а значит все три точки пересечения лежат на бесконечно удаленной прямой). Задача свелась к метрической.

Если $S \in l_\infty$, то тогда доказательство очевидно.

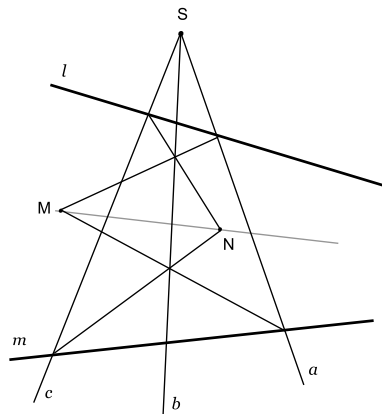
Если $S \notin l_\infty$, то рассмотрим две пары подобных треугольников: $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$ и $\triangle SAC \sim \triangle SA'C'$. Из подобия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{AB}{A'B'} \\ \frac{SA}{SA'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{AC}{A'C'} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$$

Значит, $\triangle SBC \sim \triangle SB'C'$ по двум сторонам и угла, а значит $\angle SCB = \angle SC'B'$. Значит, $BC \parallel B'C'$. $\square$

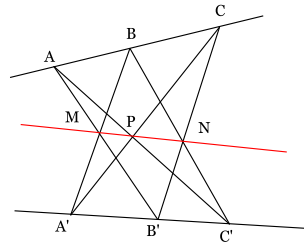
3.9.5 Построение направления на недоступную вершину угла

Пусть нам даны две прямые – l и m , которые пересекаются в недоступной нам точке T . Нам надо построить направление на эту точку. Возьмём произвольную точку S , не лежащую ни на одной из этих прямых. Проведём через неё три прямые a, b и c , пересекающие данные нам. Возьмём произвольную точку M и проведём через неё две прямые, проходящие через точки пересечения прямой a с прямыми l и m . Через точки пересечения этих прямых с прямой b и точки пересечения прямой c с прямыми l и m проведём ещё прямые, пересекающиеся в точке N . Прямая MN по теореме, обратной теореме Дезарга, эта прямая и будет направлением на точку пересечения l и m .

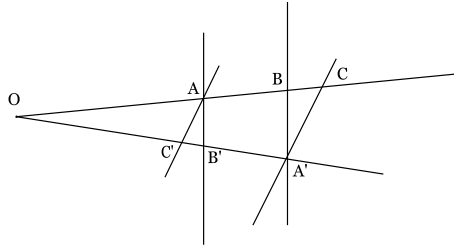


3.9.6 Теорема Паппа

Теорема 3.9.3. Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, а A', B', C' — на другой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают прямые $A'B, B'C, C'A$, соответственно в точках M, N и P . Тогда M, N и P лежат на одной прямой



Доказательство. Перенесём проективным преобразованием MN в бесконечность. При этом $AB' \parallel A'B$, $AC' \parallel A'C$. Пусть $AB \cap A'B' = 0$



При этом $\triangle OCA' \sim \triangle OAC' \Rightarrow \frac{OA}{OC'} = \frac{OA'}{OC}$ и $\triangle OAB' \sim \triangle OBA' \Rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{OB'}{OB}$. Из этого следует, что $\frac{OC}{OB'} = \frac{OC'}{OB}$, т.е. $B'C \parallel CB'$, то есть при преобразовании точка P перешла в бесконечность, значит лежала на одной прямой с M и N . $\square$

Если бы пространство, в котором мы живем, представляло бы собой лист Мёбиуса, то, совершив кругосветное путешествие, у нас сердце оказалось бы с правой стороны.

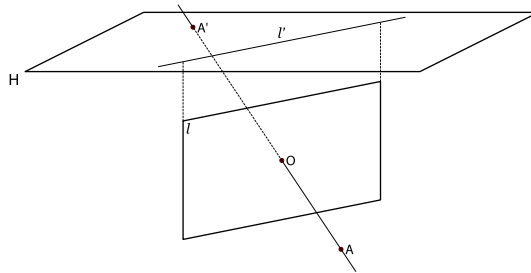
И. Б. Кожухов

3.9.7 Модели проективной плоскости

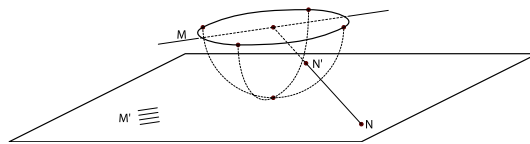
Существует несколько основных моделей проективной плоскости.

Аффинная модель. H — обычная евклидова плоскость. Тогда $H \cup l_\infty$ — проективная плоскость.

Модель в $\mathbb{R}^3$. Назовем «точками» — прямые, проходящие через точку O , а «прямыми» — плоскости, проходящие через O . Как данную модель связать с аффинной? Для этого возьмем в пространстве евклидову плоскость. Тогда пересечение «точки» и плоскости — будет проекция точки, а пересечение плоскости и «прямой» — проекцией прямой. l_∞ будет тогда пересечение евклидовой плоскости и «прямой», ей параллельной.



Топологическая модель. Вся поверхность сферы — это вся проективная плоскость. Точка, не лежащая на верхнем сечении полусферы, соответствует точке на плоскости (для этого надо провести линию, соединяющую центр сферы и точку на плоскости). Точки, лежащие на верхнем сечении сферы, представляют собой бесконечно удаленные точки. Диаметрально противоположные точки отождествляются.



Проективная плоскость, в топологии, это тождество дуг окружности AB и BA . Это одно из многообразий пространств. Примеры других многообразий: цилиндр, лист Мёбиуса, тор.

Топологическую проективную модель можно расширить, добавив верхнюю полусферу. Полученная модель называется *сферой Римана*. В ней противоположные относительно центра точки отождествляются.

Арифметическая модель Точка — это тройка чисел (x_0, x_1, x_2) , определенная с точностью до пропорциональности (то есть, $(x_0, x_1, x_2) \equiv (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ для $\lambda \neq 0$). Числа x_0, x_1, x_2 и λ из некоторого поля $\mathcal{F}$. Запрещается только тройка чисел $(0, 0, 0)$.

Прямая — множество точек, заданных уравнением: $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, $a, b, c \in \mathcal{F}$ и одновременно все три коэффициента ненулевые. (a, b, c) — координаты прямой. Прямая (p, q, r) и точка (a, b, c) находятся в отношении инцидентности, если $pa + qb + rc = 0$. Очевидна равносильности прямых и точек.

Арифметическая модель легко обобщается:

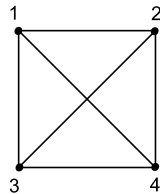
1. $\mathcal{F}$ — любое поле.
2. $P^n(\mathcal{F})$ — n -мерное проективное пространство над полем $\mathcal{F}$, тогда точка — это упорядоченный набор из $(n + 1)$ элементов.

Тогда при $n = 2$ получаем проективную плоскость, а при $n = 3$ — проективное пространство.

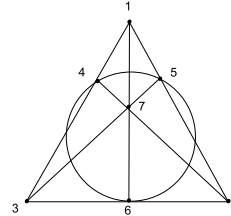
3.9.8 Конечные проективные плоскости. Проективное пространство.

Конечная проективная плоскость состоит из конечного множества точек $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ и конечного множества прямых $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ и должны выполняться аксиомы 1-4:

1. Для любых 2 точек существует единственная прямая, инцидентная им
2. Для любых 2 прямых существует единственная точка, инцидентная им
3. Существуют 3 точки, не принадлежащие одной прямой
4. На каждой прямой лежит не менее 3 точек.



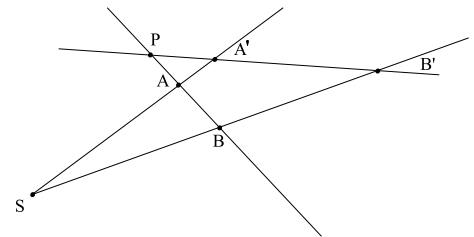
Самая маленькая конечная
аффинная плоскость



Самая маленькая конечная
проективная плоскость

Утверждение. На всех прямых одинаковое количество точек.

Доказательство. Возьмём 2 произвольные различные прямые l и l' . У них существует общая точка P . Возьмём по одной точке на каждой из прямых l и l' не совпадающие с P . Проведём через них прямую — она не совпадает ни с l , ни с l' . Так как на ней должно быть минимум 3 точки, то возьмём третьей точкой S (S не принадлежит ни l , ни l').



Тогда между всеми точками l и l' можно показать взаимнооднозначное соответствие:

1. У каждой точки в l' есть прообраз в l .

Доказательство. Возьмём произвольную точку на прямой l , проведём через неё и S прямую. Она пересекает l' в единственной точке, соответствующей взятой. $\square$

2. Разные точки на прямой l переходят в разные точки на прямой l' .

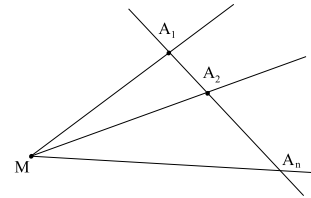
Доказательство. Возьмём $A, B \in l$ и проведём прямые SA, SB . Если $SB \cap l' = C$ и $SA \cap l' = C$, тогда несовпадающие прямые (есть различные точки A и B) пересекаются в 2 различных точках. Противоречие. $\square$

Так как можно провести взаимнооднозначное соответствие между точками на l и l' , то количество точек на прямых l и l' одинаково. $\square$

Определение. Если на каждой прямой в конечной проективной плоскости лежит $q + 1$ точка, то число q — есть *порядок* этой проективной плоскости.

Утверждение. На проективной плоскости порядка q через каждую точку проходит $q + 1$ прямая.

Доказательство. Возьмём точку M . Так как существует 3 точки, не принадлежащие одной прямой, то существует как минимум ещё 2 точки кроме M . Возьмём прямую l , проходящую через них. На l лежит $q + 1$ точка. Проведём все прямые через точку M и точки прямой l — их будет ровно $q + 1$. Это и будут все прямые, проходящие через M (пусть не все, тогда возьмём прямую, не попавшую в набор — она пройдёт через M и пересечет l , но все точки l уже высечены).



□

Утверждение. На конечной проективной плоскости порядка q ровно $q^2 + q + 1$ точек.

Доказательство. Возьмём произвольную точку M конечной проективной плоскости H . Проведём все прямые, проходящие через неё — их будет $q + 1$. Каждая прямая содержит q точек, кроме M . Полученные прямые не имеют общих точек, кроме M , так как иначе какие-либо из них пересекаются в 2 или более точках, что невозможно. Тогда рассматриваемые прямые содержат в себе все точки плоскости H (если существует точка S , не попавшая на эти прямые, то проведём SM , тем самым мы получим одну из прямых пучка. Тогда всех точек будет ровно $q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$).

□

Утверждение. На конечной проективной плоскости порядка q ровно $q^2 + q + 1$ всех прямых.

Доказательство. В силу равнозначности точек и прямых, доказательство довольно сильно похоже на предыдущее.

Возьмём прямую l плоскости H . Через все точки на ней, а их $q + 1$ штука, проведём все прямые, проходящие через них. Через каждую точку будет проходить q прямых, не считая l . Это и будут все прямые плоскости H , так как если есть ещё прямая, то она пересекает l в какой-либо точке, но через все точки на ней уже проведены все прямые. Тогда количество прямых будет равно $q^2 + q + 1$.

□

Встаёт вопрос — для каких q существует конечная проективная плоскость порядка q ? И не только плоскость, а любое n -мерное пространство.

При $q = 2, 3, 5, \dots$ (q — простое) ответ — да, так же как и при $q = p^\alpha$, так как существует поле из указанного количества элементов (проективное пространство $\mathbb{P}^n$ может быть построено из элементов поля F , $|F| = q$).

Для $q = 6 = 2 \cdot 3$ доказана невозможность существования такого проективного пространства Леонардом Эйлером, для $q = 10 = 2 \cdot 5$ невозможность существования доказана лишь в 1989 году. Существует ли пространство для $q = 12$? На этот вопрос предстоит ответить Вам, уважаемый читатель. До сих пор стоит вопрос, является ли наличие поля из q элементов обязательным условием для существования пространства данного порядка.

Точки n -мерного проективного пространства $\mathbb{P}^n(\mathbb{Z}_q)$ представимы в виде $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, причём $x_i \in \{0, \dots, q\}$, но набор $(0, 0, \dots, 0)$ не существует. Тогда таких наборов будет $q^n + 1 - 1$. Но так как координаты определены с точностью до константы, то $|\mathbb{P}|$ в $q - 1$ раз меньше, т.е. $|\mathbb{P}| = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^n + \dots + q + 1$. Так, например, для конечной проективной плоскости ($n=3$) $|\mathbb{P}| = q^2 + q + 1$.

Также мы можем посчитать количество всех прямых в $\mathbb{P}^n(F)$, $|F| = q$. Это число определяется выражением

$$C_{\frac{q^n-1}{q-1}}^2 / C_{q+1}^2 = \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q+1)(q-1)^2},$$

в котором в числителе количество всевозможных прямых, а в знаменателе – сколько раз мы посчитали каждую прямую.

4 11 класс. II полугодие

4.1 Abstract

Материал, который был «пройден» нами во втором полугодии 11 класса далеко выходит за рамки школьной программы, поэтому его изложение в рамках этого труда не имеет смысла. Среди изученных тем находятся геометрия Лобачевского и сферическая геометрия, инверсия, дифференциальные уравнения, метрические пространства и другие темы, освещаемые на высших курсах технических университетов. Нельзя сказать, что что-то было понятно до конца, но общее представление о данных темах сложилось, и если придётся, разобраться в них на более высоком уровне будет уже гораздо проще.

5 Final

Вот и всё...

FECI QUOD POTUI, FACIANT MELIORA POTENTES¹.

GAUDEAMUS IGITUR!



¹Я сделал, что мог; кто может, пусть сделает лучше