Задача №1. Чашка до краёв наполнена чёрным кофе в количестве 100 мл, а в кувшин налито 300 мл молока. Какое количество кофе надо перелить из чашки в кувшин и, перемешав, снова наполнить её до краёв полученной смесью, чтобы молока и кофе в чашке было поровну?

Решение. Пусть нам надо отлить в кувшин x мл кофе. Тогда после этой операции в кувшине станет $x + 300$ мл смеси, процентное содержание кофе в которой равно $\frac{x}{x+300} \cdot 100\%$, а молока – $\frac{300}{x+300} \cdot 100\%$. Тогда после обратного переливания x мл смеси в чашке окажется $(100-x) + \frac{x}{x+300} \cdot x$ мл кофе и $\frac{300}{x+300} \cdot x$ мл молока. По условию эти две величины должны быть равны. Составим уравнение:

$$(100 - x) + \frac{x}{x+300} \cdot x = \frac{300}{x+300} \cdot x$$

Из условия понятно, что $0 < x \leqslant 100$.

$$(100 - x)(x + 300) + x^2 = 300x$$

$$30000 + 100x - x^2 - 300x + x^2 = 300x$$

$$500x = 30000$$

$$x = 60$$

Такой x удовлетворяет условию.

Ответ. 60 мл.

Задача №2. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=2\operatorname{tg}2x+3\operatorname{ctg}x$

Решение. Найдём область определения для данного выражения: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, \pi n \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

Применим формулы тангенса суммы для слагаемых в правой и левой частях уравнения.

$$\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}+1=2\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+3\operatorname{ctg}x$$

Такой переход был неравносилен – область определения изменилась: из неё исключились точки вида $\frac{\pi}{2}+\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$, которые могли быть корнями исходного уравнения. Проверка показывает, что $x=\frac{\pi}{2}+\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$ – корень.

Дальнейшие преобразования уравнения будем проводить на новой области определения – $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}x}-\frac{2}{1-\operatorname{tg}x}\cdot\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=3\operatorname{ctg}x$$

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}x}\left(1-\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)=3\operatorname{ctg}x$$

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=3\operatorname{ctg}x$$

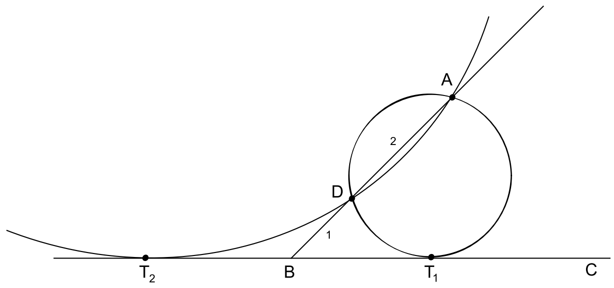
$$\frac{2}{1+\operatorname{tg}x}=3\operatorname{ctg}x$$

$$\operatorname{tg}x=-3$$

$$x=-\operatorname{arctg}3+\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $-\operatorname{arctg}3+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Задача №3. На стороне AB угла $\angle ABC = 30^\circ$ взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.



Решение. Возможны два случая расположения такой окружности, показанные на рисунке.

1. Окружность касается луча BC в точке T_1.
   (a) По свойству касательно и секущей $BD \cdot AD = BT_1^2 \quad \Rightarrow \quad BT_1 = \sqrt{3}$
   (b) По теореме косинусов для треугольников $\triangle BDT_1$ и $\triangle BAT_1$ получаем, что $DT_1 = 1$ и $AT_1 = \sqrt{3}$:
   $$DT_1^2 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 1$$
   $$AT_1^2 = 9 + 3 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3$$
   (c) Рассмотрим треугольник $\triangle ADT_1$: $AD = 2, DT_1 = 1, AT_1 = \sqrt{3}$. Так как $AT_1^2 + DT_1^2 = AD^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора $\angle AT_1D = 90^\circ$.
   (d) Так как $\angle AT_1D = 90^\circ$, то AD – диаметр. Следовательно радиус этой окружности равен $AD/2 = 1$.

2. Окружность касается продолжения луча BC в точке T_2.
   (a) По свойству касательной и секущей $BD \cdot AD = BT_2^2 \quad \Rightarrow \quad BT_2 = \sqrt{3}$
   (b) По теореме косинусов для треугольников $\triangle BDT_2$ и $\triangle BAT_2$ получаем, что $DT_2 = \sqrt{7}$ и $AT_2 = \sqrt{21}$.
   $$DT_1^2 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ = 7$$
   $$AT_1^2 = 9 + 3 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ = 21$$
   (c) Рассмотрим треугольник $\triangle ADT_2$: он вписан в рассматриваемую окружность. По обобщённой теореме синусов $\frac{AD}{\sin \angle AT_2D} = 2R$. По теореме косинусов
   $$AD^2 = AT_2^2 + DT_2^2 - 2AT_2 \cdot DT_2 \cdot \cos \angle AT_2D$$
   $$4 = 7 + 21 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos \angle AT_2D$$
   $$\cos \angle AT_2D = \frac{12}{7\sqrt{3}}$$
   Через основное тригонометрическое тождество выражаем $\sin \angle AT_2D > 0$ так как $\angle AT_2D$ – угол треугольника:
   $$\sin \angle AT_2D = \sqrt{1 - \frac{144}{49 \cdot 3}} = \sqrt{1 - \frac{48}{49}} = \frac{1}{7}$$
   (d) Теперь без труда получаем $R = 7$.

Ответ. 1, 7.

Задача №4. Решить неравенство $5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leqslant 10$

Решение. Исходное неравенство равносильно следующему:

$$5^{\frac{1}{\log_2 x}} \cdot \log_2 x + \frac{5^{\log_2 x}}{\log_2 x} \leqslant 10$$

Сделаем замену $\log_2 x = t, t \neq 0$:

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + \frac{5^t}{t} \leqslant 10$$

$$t\left(t^2 \cdot 5^{\frac{1}{t}} - 10t + 5^t\right) \leqslant 0 \qquad (*)$$

Преобразуем выражение в скобке, выделив квадрат разности:

$$t^2 \cdot 5^{\frac{1}{t}} - 10t + 5^t = \left(t \cdot 5^{\frac{1}{2t}}\right)^2 - 2 \cdot t \cdot 5^{\frac{1}{2t}} \cdot 5^{1-\frac{1}{2t}} + 5^{2-\frac{1}{t}} - 5^{2-\frac{1}{t}} + 5^t =$$
$$= \left(t \cdot 5^{\frac{1}{2t}} - 5^{1-\frac{1}{2t}}\right)^2 - \left(5^{2-\frac{1}{t}} - 5^t\right)$$

Сравним $5^{2-\frac{1}{t}}$ и 5^t:

$$\begin{array}{rcl} 5^{2-\frac{1}{t}} & \vee & 5^t \\ 2-\frac{1}{t} & \vee & t \\ 2 & \vee & t+\frac{1}{t} \end{array}$$

Так как для $\forall t > 0 \quad t+\frac{1}{t} \geqslant 2$ (причём равенство достигается только при $t = 1$), то $5^{2-\frac{1}{t}} - 5^t \leqslant 0$. Т.е. при $t > 0 \quad \left(t \cdot 5^{\frac{1}{2t}} - 5^{1-\frac{1}{2t}}\right)^2 - \left(5^{2-\frac{1}{t}} - 5^t\right) \geqslant 0$, и неравенство (*) выполняется только при $t = 1$.

При $t < 0$ неравенство (*) выполняется всегда, так как в скобке все слагаемые оказываются положительными, а само $t < 0$.

Итого делаем вывод, что $t \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$.

Возвращаясь к замене имеем, что $x \in (0; 1) \cup \{2\}$.

Ответ. $(0; 1) \cup \{2\}$

Задача №5. Ночью 7 художников по очереди изрисовали белую стену каждый своей краской. Каждый из них закрасил $k\%$ площади стены, не видя, что нарисовали предыдущие. Если на какой-нибудь участок стены попадали все 7 красок, он опять становился белым. При каких целых k гарантируется существование хотя бы одного белого участка стены?

Решение. Возможно два случая:

1. Гарантируется существование незакрашенного участка стены. Это достигается если $k < \frac{100}{7}$, т.е. как бы художники не закрашивали стену, они суммарно не могли бы закрасить 100% стены. В промежуток от 0 до $\frac{100}{7}$ попадает 15 целых k от 0 до 14.

2. Гарантируется существование участка стены, на который бы попали все 7 красок. Пусть каждый художник закрасил $k\%$ стены. Тогда на $(100-k)\%$ его краска отсутсвует. Чтобы было гарантировано существование участка стены, на который попало бы все 7 красок, необходимо чтобы суммарная площадь, на которой отсутствует хотя бы один из семи цветов не превышала бы 100%, т.е.
$$(100-k)\cdot 7 < 100$$
$$7k > 600$$
Так как k – целое, то $86 \leqslant k \leqslant 100$.

Ответ. $\{0, 1, ..., 14\} \cup \{86, 87, ..., 100\}$

Задача №6. Некоторая прямая пересекает график функции $y(x) = ax^3 + bx + c$ ровно в трёх различных точках, сумма ординат которых равна 6. В какой точке эта прямая пересекает ось ординат?

Решение. Пусть прямая задана уравнением $h(x) = kx + d$ и прямая и парабола пересекаются в точках с абциссами x_1, x_2, x_3. Известно, что $h(x_1) + h(x_2) + h(x_3) = k(x_1 + x_2 + x_3) + 3d = 6$.

Введём функцию $f(x) = y(x) - h(x)$. Очевидно, что $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, то есть x_1, x_2 и x_3 – корни уравнения $f(x) = 0$.

По обобщённой теореме Виета сумма корней уравнения (в том числе и кратных) $g(x) = 0$, где $g(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, равна $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

В данном случае $g(x) = f(x) = ax^3 + 0 \cdot x^2 + (b-k)x + (c-d) \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$. То есть $3d = 6 \quad \Rightarrow \quad h(0) = d = 2$.

Ответ. 2.

Задача №7. При каких натуральных n система имеет решение?

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n = 0 \\ \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n = 0 \\ |x_i - x_j| \leqslant \pi, \quad i, j = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

Решение. Пусть нам задано n единичных компланарных векторов, отложенных от точки $(0; 0)$ на плоскости с декартовой системой координат. Пусть угол между каждым из них и положительным направлением оси Ox составляет x_i радиан. Тогда $(\cos x_i; \sin x_i)$ – координаты каждого из этих векторов. Длина каждого вектора равна 1.

Рассматривая первое и уравнение системы, делаем вывод, что сумма проекций этих векторов на оси Ox и Oy равна нулю, то есть геометрическая сумма всех векторов равна нулевому вектору.

Пусть $x_1 = \min\{x_i\}$, а $x_n = \max\{x_i\}$. По условию $x_n - x_1 \leqslant \pi$, т.е. угол между векторами, заданными максимальным и минимальным углами, меньше либо равен π. Из этого следует, что и все остальные вектора лежат внутри или на сторонах этого угла (если угол равен π, то вектора лежат по одну сторону от прямой, на которой лежат вектора $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_n$).

Пусть $x_n - x_1 < \pi$. Рассмотрим проекции всех векторов на биссектрису угла между векторами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_n$. Так как $x_n - x_1$ строго меньше π и все n векторов лежат внутри этого угла, то сумма всех проекций ненулевая, а следовательно и геометрическая сумма всех векторов не равна нулевому вектору. Противоречие.

Пусть $x_n - x_1 = \pi$. Если какой либо из векторов лежит внутри этого развёрнутого угла, то, опять же, сумма проекций всех векторов на его биссектрису не равна нулю, получаем противоречие. Отсюда заключаем, что все n векторов лежат на одной прямой. Их проекции на перпендикуляр к этой прямой равны нулю, а проекции на саму прямую равны или 1, или -1. Если n – нечётное, то в какую-то сторону направлено больше векторов, чем в противоположную, а значит сумма проекций не равна нулю. Условие не выполнено. Если n – чётное $(n = 2k, \quad k \in \mathbb{N})$, то решения системы существуют, например $x_1 = \dots = x_k = 0, \quad x_{k+1} = \dots = x_n = \pi$.

Ответ. $n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}$

Задача №8. Квадратную (вид сверху) электроплиту, вплотную задвинутую в угол прямоугольной комнаты, можно поворачивать по полу на произвольный угол вокруг любой из её четырёх ножек, расположенных в вершинах квадрата. Какое наименьшее число таких поворотов наужно совершить, чтобы в итоге, повернув электроплиту на $90°$, поставить её на прежнее место?

Решение. Как мне показалось, условие этой задачи несколько неоднозначно, недоговорено. Поэтому рассмотрю два случая, соответсвующие двум различным трактовкам условия. Условно их можно назвать «идельный эксперимент» и «реальный эксперимент».

1. При идеальном эксперименте все поворты плиты производятся только в плоскости пола, плиту можно рассматривать как *плоский* квадрат (рис. 1).

   Очевидно, что за два поворота относительно любой из вершин (ножек плиты) квадрат нельзя развернуть требуемым образом – первым ходом можно развернуть квадрат только относительно зелёной или синей вершин, и вторым ходом кроме как вернуть квадрат на место или ещё дальше выдвинуть его из угла вариантов нет.

   Теперь покажем, что нельзя развернуть квадрат требуемым образом за 3 поворота. Заметим, что то, в какую сторону (по часовой стрелке или против) развернётся квадрат на $90°$, не имеет значения, так как если мы сумели за n поворотов развернуть его по часовой стрелке, то за n поворотов, симметричных проделанным относительно биссектрисы угла комнаты, мы сможем развернуть его и против часовой стрелки.

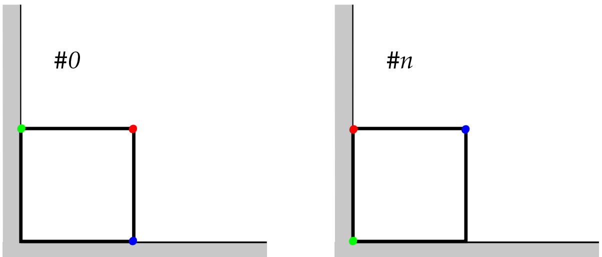
   

   рис 1. рис 2.

   Пусть первоначально плита находилось в положении №0 (рис. 1). Например, будем стремиться повернуть квадрат в положение №n (рис. 2), затратив при этом минимальное число поворотов n.

   Предположим, что мы можем осуществить задуманное за $n = 3$ поворотов. Из этих трёх поворотов первый обязательно осуществляется относительно зелёной или синей вершины (как отмечалось ранее), а последний, третий – относительно красной или чёрной вершин. Всего возможно 4 варианта. Рассмотрим их.

   (a) 1-й поворот относительно зелёной, 3-й – относительно красной. Заметим, что каким бы ни был первый поворот, не существует второго поворота, который перевёл бы красную вершину на то место, которое она должна занимать перед третьим поворотом.

   (b) 1-й поворот относительно синей, 3-й – относительно чёрной. Ситуация абсолютно аналогичная предыдущему случаю.

   (c) 1-й поворот относительно зелёной, 3-й – относительно чёрной. Рассмотрим траектории движения синей и красной вершин при этих поворотах (рис. 3). Они пересекаются в точках A и B соответственно.

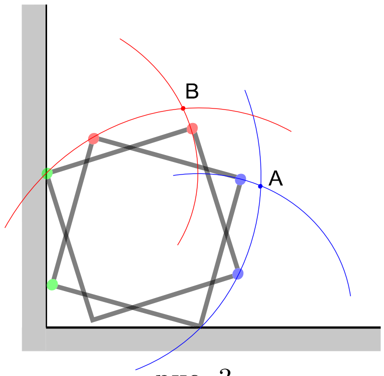


рис. 3

Понятно, что для осуществления задуманного за 3 поворота необходимо, чтобы после первого поворота синяя вершина попала в точку A или красная в точку B, так как иначе любой второй поворот не переведёт чёрную вершину на место, которое она должна занимать перед третьим поворотом. Но предполагаемый второй поворот, переводящий чёрную точку на своё место перед третьим поворотом, как относительно точки A, так и точки B неосуществим. Покажем это.

Введём систему координат, оси Ox и Oy направим по сторонам угла комнаты. За единичный отрезок возьмём сторону квадрата. Рассчитаем координаты точек A и B. Точка A есть пересечение окружностей, заданных уравнениями $x^2 + (y-1)^2 = 2$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$ в первой четверти, а точка B — $(x-1)^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Опуская вычисления, получаем координаты т. A $\left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}; \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$ и т. B $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}; \frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)$. $\frac{1+\sqrt{7}}{4} < 1$, $\frac{1+\sqrt{7}}{4} < \sqrt{2}$, то есть при повороте, переводящем чёрную вершину на своё место перед третьим поворотом, стена мешает или чёрной, или зелёной вершине (смотря относительно какой из точек делать второй поворот).

(d) 1-й поворот относительно синей, 3-й – относительно красной. Все рассуждения, описанные в предыдущем пункте, выполняются и в этом случае.

Таким образом было доказано, что за три поворота развернуть квадрат нельзя. Теперь достаточно привести пример, при котором квадрат удаётся развернуть на 90° за 4 поворота. Пример приведу с указанием координат вершин в порядке обхода после каждого из поворотов.

0. (0;0), (1;0), (1;1), (0;1).
1. $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1;0), \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. $\left(\frac{3}{2}; 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1;1), \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. (0;1), (1;1), (1;2), (0;2).
4. (0;1), (0;0), (1;0), (1;1).

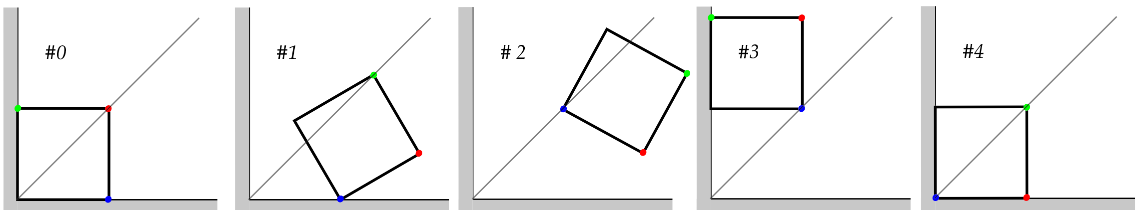


рис. 4

2. Под «реальным экспериментом» подразумевается возможность поворота реальной плиты. По опять же понятным причинам, за 2 поворота требуемого реализовать не удастся, если только положить плиту на бок, но в реальном эксперименте эта плита перестаёт быть

пригодной для использования. Воспользуемся попыткой построения последовательности из трёх поворотов, рассмотренной в предыдущем случае (рис. 3). Там мы столкнулись с тем, что поворот №2 неосуществим, но как показывают расчёты, для успешной реализации этого поворота не хватает совсем малого – при ширине плиты в 1 метр приблизительно только 2 мм мешают этому повороту. Однако, если во время поворота отклонить плиту от вертикали в сторону от стены на некоторый произвольный небольшой угол, то ничто не помешает осуществить этот поворот (рис. 5, $HK = \sqrt{2}, OK = \frac{3+\sqrt{7}}{4}$). $\alpha \approx 3.7°$.

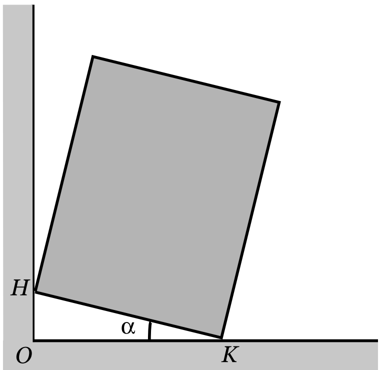


рис. 5

То есть при реальном эксперименте требуемое осуществимо за три поворота.

Ответ. 4 или 3 в зависимости от трактовки условия.

Задача №9. Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$(x + y\sqrt{2})^6 + (u + v\sqrt{2})^6 = 7 + 5\sqrt{2}$$

Решение.

1. Докажем, что если число представимо в виде $a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q}$, то такое представление единственно. Действительно, если $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$, то $\sqrt{2} = \frac{a'-a}{b-b'}$. Отсюда следует, что $b = b'$, так как иначе $\sqrt{2}$ было бы рациональным числом, что неверно. Из равенства $b = b'$ моментально следует $a = a'$.

2. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Заметим, что если

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} = e + f\sqrt{2},$$

   то

$$(a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} = e - f\sqrt{2}$$

3. Предположим, что существуют такие рациональные числа x, y, u, v, при которых выполняется условие задачи:

$$(x + y\sqrt{2})^6 + (u + v\sqrt{2})^6 = 7 + 5\sqrt{2}.$$

   Тогда, по предыдущему пункту,

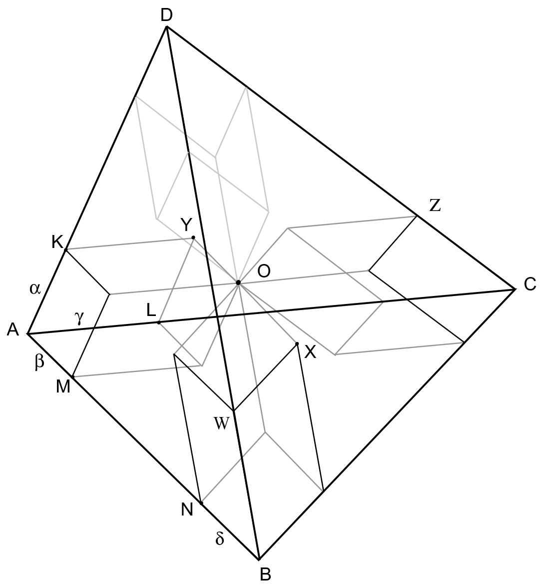
$$(x - y\sqrt{2})^6 + (u - v\sqrt{2})^6 = 7 - 5\sqrt{2} = \sqrt{49} - \sqrt{50} < 0,$$

   чего не может быть, так как $(x - y\sqrt{2})^6 \geqslant 0$ и $(u - v\sqrt{2})^6 \geqslant 0$. Противоречие.

Ответ. Нет, не существуют.

Задача №10. Через точку, лежащую внутри тетраедра, проведены четыре плоскости, параллельные граням тетраедра и разбивающие его на части. Объёмы четырёх частей, примыкающих к вершинам тетраедра, равны соответственно 2, 3, 9 и 18. Найти объём каждой из остальных частей тетраедра.

Решение. Легко заметить, что части, прилегающие к вершинам тетраедра, являются наклонными параллелепипедами. Все они касаются в выбранной точке. Изобразим их на рисунке. Для определённости можно положить, что параллелепипед, прилегающий к вершине A имеет объём 2, к вершине B — 3, C — 9, D — 18.



Пусть $AK = \alpha AD$, $AM = \beta AB$, $AL = \gamma AC$, $BN = \delta AB$. Объём всего тетраедра примем равным V. Тогда

$$V = \frac{1}{6}\left| < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} > \right|$$

$$2 = \left| < \alpha\overrightarrow{AB}, \beta\overrightarrow{AC}, \gamma\overrightarrow{AD} > \right| = \alpha\beta\gamma \cdot 6V$$

Так как все плоскости проведены параллельно граням тетраедра, то они пересекают грани тетраедра параллельно его ребрам. Поэтому, несколько раз применяя обобщённую теорему Фалеса, получаем следующие выражения для объёмов остальных параллелепипедов:

$$3 = \alpha\gamma\delta \cdot 6V$$

$$9 = \alpha\beta\delta \cdot 6V$$

$$18 = \beta\gamma\delta \cdot 6V$$

Выражая из этих уравнений α, β, γ и δ, получаем:

$$\begin{cases} \alpha & = & \sqrt[3]{\frac{1}{36V}} \\ \beta & = & \sqrt[3]{\frac{6}{V}} \\ \gamma & = & \sqrt[3]{\frac{2}{9V}} \\ \delta & = & \sqrt[3]{\frac{81}{4V}} \end{cases}$$

Необходимо получить ещё одно уравнение, связывающее α, β, γ и δ. Для этого заметим, что $XY = (\beta+\delta)\cdot AB$. С другой стороны $XY : KW = ZX : ZW = (1-\alpha)\cdot BC - \gamma BC\ :\ (1-\alpha)\cdot BC$. Ещё из подобия треугольников имеем, что $KW = (1-\alpha)\cdot AB$. Подставляя, получаем: $(\beta+\delta)\cdot AB = \frac{(1-\alpha-\gamma)}{1-\alpha}\cdot(1-\alpha)\cdot AB$. Итого

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$$

Теперь можно без труда найти все неизвестные:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{36}} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{81}{4}} = V^{1/3}$$

Возводя в куб, получаем, что $V = 162$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{18} \\ \beta &= \frac{1}{3} \\ \gamma &= \frac{1}{9} \\ \delta &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Теперь без труда можно рассчитать объёмы всех 10 частей, из которых 4 тетраедра, подобных большому тетраедру и 6 фигур, верхнее основание которых треугольник, а нижнее — трапеция. Объёмы тетраедров равны $\frac{1}{36}, 6, \frac{2}{9}, \frac{81}{4}$ (они подобны большому с коэффициентами подобия α, β и т.д.). Объёмы оставшихся фигур рассчитываются как разность объёмов нескольких тетраедров. Они равны $\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{15}{2}, \frac{33}{2}, \frac{135}{2}, 8$.

Ответ. 1/36, 2/9, 6, 81/4; 1/2, 7/2, 15/2, 8, 33/2, 135/2.