Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра теории функций и функционального анализа

Курсовая работа

Критерий положительности плотности решения эллиптического уравнения для мер

Выполнил: студент 431 группы
Борис Агафонцев

Научный руководитель:
профессор В. И. Богачев

Москва
2010

1 Введение

Пусть дано уравнение вида

$$\mathcal{L}^*\mu = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}u(x) = \partial_{x_i}\bigl(a^{ij}(x)\partial_{x_j}u(x)\bigr) + b^i(x)\partial_{x_i}u(x) \tag{2}$$

— эллиптический оператор второго порядка. Будем говорить, что неотрицательная локально конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет слабому эллиптическому уравнению (1), если борелевские функции a^{ij} и b^i интегрируемы на каждом компактном множестве в $\mathbb{R}^d$ относительно меры μ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}u\, d\mu = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3}$$

Пусть также матрица $A(x) = \bigl(a^{ij}(x)\bigr)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ симметрична и удовлетворяет условиям

$$\exists p > d\colon\ a^{ij} \in W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d), \tag{C1}$$

$$\exists m, M > 0\colon \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad m|y|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} a^{ij}(x)y_iy_j \leqslant M|y|^2 \tag{C2}$$

Если потребовать дополнительно, чтобы $b^i \in \mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, то мера μ имеет плотность: $\mu = \varrho\, dx$, $\varrho \in W^{p,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$; плотность ϱ также имеет непрерывную версию.

Сформулируем следующие условия. Пусть $f \in C^2[0,\infty)$.

$$f(t) > 0, \quad f'(t) > 0, \quad f''(t) > 0 \qquad \forall t \geqslant t_0 > 0; \tag{H1}$$

$$(e^{-f(t)})'' \geqslant 0 \text{ для } \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0, \qquad e^{-f(t)} \downarrow 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{H2}$$

$$|b|\exp(\widetilde{\psi}(|b|)) \in L^p(\mu),\ p > \min\{2, d\}, \quad \widetilde{\psi} \in C[0,\infty),\ \widetilde{\psi} > 0,\ \widetilde{\psi}' > 0 \tag{C3}$$

$$\exists N\colon \forall z \geqslant z_0 > 0 \quad \widetilde{\psi}^{-1}(z) \leqslant Nf'(f^{-1}(z)). \tag{H3}$$

В работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mu = \varrho\, dx$ — решение уравнения* (1)*, где коэффициенты a^{ij}, b^i удовлетворяют условиям* (C1) *и* (C2)*, и выполняются условия* (H1), (H2), (H3) *и* (C3)*. Тогда существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$, что*

$$\varrho(x) \geqslant e^{-f(c_1|x|+c_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

В работе [2] была доказана теорема.

Теорема 2. *Для измеримой функции* $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *следующие условия эквивалентны*:

(A) *Пусть* $\rho\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\rho/\rho')\rho(x)dx < \infty \tag{5}$$

и $\rho \neq 0$. *Тогда* $\rho(x) > 0$ *почти для всех* (*по мере Лебега*) $x \in \mathbb{R}$.

(C) *Пусть* ψ *неубывающая выпуклая функция,* $\psi(c) > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{c}^{\infty} \frac{\log\psi(x)}{x^2}dx = \infty. \tag{6}$$

Из работы [2] также воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть* $c > 0$ *и* $\varphi\colon [c,\infty) \to [d,\infty)$ — *гомеоморфизим. Тогда*

$$\int\limits_{d}^{\infty} \frac{dy}{\varphi^{-1}(y)} = \int\limits_{c}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^2} - \frac{d}{c} \tag{7}$$

(*т. е. оба интеграла сходятся одновременно, и если хотя бы один из них сходится, равенство выполнено*).

2 Основной результат

Пусть ψ из теоремы 2 и $\widetilde{\psi}$ из теоремы 1 связывает соотношение

$$\psi(t) = t\exp(\widetilde{\psi}(t)). \tag{8}$$

Тогда, если выполнено условие

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} > \frac{1}{t}, \tag{9}$$

то из условия (5) теоремы 2 следует условие (C3). Условие (9) необходимо для строгого возрастания функции $\widetilde{\psi}$:

$$\psi'(t) = e^{\widetilde{\psi}(t)} + t\widetilde{\psi}'(t)e^{\widetilde{\psi}(t)},$$

$$\widetilde{\psi}'(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} - \frac{1}{t}.$$

Покажем, что из выполнения условия (6) и усиленного условия (9) следуют и остальные условия, необходимые для выполнения теоремы 1.

Обозначим $\widetilde{\psi}^{-1} = g$. Очевидно, что для функции g выполнены условия $g(z) > 0$, $g'(z) > 0$. Условие (6) теоремы 2 с учётом леммы 1 и после некоторых преобразований можно переписать в виде

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dy}{g(y)} = +\infty, \tag{10}$$

а функцию f искать из условия (H3) как решение дифференциального уравнения

$$g(z) = Nf'(f^{-1}(z)). \tag{11}$$

Пусть $t = f^{-1}(z)$, $z = f(t)$. Перепишем уравнение (11) в виде

$$N\frac{df}{g(f(t))} = dt,$$

таким образом функцию $f(t)$ будем определять из соотношения

$$t/N + C = \int\limits_b^{f(t)} \frac{dy}{g(y)}. \tag{12}$$

Из условия (6) получаем, что при $t \to +\infty$ функция $f(t)$ должна являться неограниченно растущей; очевидно, выполняется условие $f(t) > 0$, хотя бы начиная с некоторого t_0.

Дифференцируя обе части уравнения (12) по t получаем, что

$$\frac{1}{N} = \frac{f'(t)}{g(f(t))} \;\Leftrightarrow\; f'(t) = \frac{1}{N}g(f(t)). \tag{13}$$

Ввиду положительности функции g получаем, что $f'(t) > 0$. Продифференцировав обе части равенства ещё раз получаем

$$f''(t) = \frac{1}{N}g'(f(t))f'(t) > 0. \tag{14}$$

Условие (H1) выполнено.

Убывание к нулю функции $e^{-f(t)}$ на бесконечности очевидным образом следует из неограниченности функции f. Покажем, что при усилении условия (9) также условие (H2) выполняется полностью. Рассмотрим выражение

$$\big(e^{-f(t)}\big)'' = \big(-f'(t)e^{-f(t)}\big)' = -f''(t)e^{-f(t)} + \big(f'(t)\big)^2 e^{-f(t)} = \\ = e^{-f(t)}\big((f'(t))^2 - f''(t)\big)$$

Рассмотрим подробнее, при каких условиях выполнено неравенство $(f'(t))^2 - f''(t) > 0$. Возьмём выражение для $f'(t)$ из (13) и выражение для $f''(t)$ из (14). Тогда рассматриваемое неравенство можно переписать в виде

$$(f'(t))^2 - f''(t) = \frac{g(z)}{N^2}\big(g(z) - g'(z)\big).$$

Разность $g(z) - g'(z)$ перепишем в терминах функции $\widetilde{\psi}(t)$:

$$\widetilde{\psi}^{-1}(z) - \big(\widetilde{\psi}^{-1}(z)\big)' = \widetilde{\psi}^{-1}(z) - \frac{1}{\widetilde{\psi}'(\widetilde{\psi}^{-1}(s))} = t - \frac{1}{\widetilde{\psi}'(t)},$$

отсюда приходим, что необходимо, чтобы было выполнено условие $\widetilde{\psi}'(t) > \frac{1}{t}$. Это условие перепишем далее в терминах функции ψ: требуется, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} > \frac{2}{t}, \tag{15}$$

что усиливает требования условия (9).

Таким образом, если для некоторой функции $\psi(t)$ выполнено условие (6) теоремы 2 и вдобавок к нему выполнено условие (15), то взяв функцию f как решение уравнения (11) мы автоматические гарантируем выполнение условий (H3), а также (H1), (H2) и (C3), а следовательно, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\mu = \varrho\, dx$ — *решение уравнения* (1), *где коэффициенты* a^{ij}, b^i *удовлетворяют условиям* (C1) *и* (C2). *Пусть выпуклая неубывающая функция* $\widetilde{\psi}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *такова, что выполнены условия*

$$\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{dz}{\widetilde{\psi}^{-1}(z)} = +\infty, \qquad \widetilde{\psi}'(t) > \frac{1}{t}.$$

Тогда для функции f, *определяемой из условия* $f^{-1}(z) = \int\limits_{\beta}^{z} \frac{dy}{\widetilde{\psi}^{-1}(y)}$; *выполнены условия* (H1)–(H3); *выполнено условие* (C3) *и существуют такие числа* $c_1, c_2 > 0$, *что верна оценка*

$$\varrho(x) \geqslant e^{-f(c_1|x|+c_2)}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Список литературы

[1] Богачёв В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Нижние оценки плотностей решений эллиптических уравнений для мер // ДАН. — 2009. — Т. 426. — № 2. — С. 156–161.

[2] Scheutzow M., Weitszäcker H. von. Which moments of a Logarithmic Derivative Imply Quasiinvariance? // Doc. Math. — 1998. — V. 3. — P. 261–272.