Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций и функционального анализа

Курсовая работа

Выполнил: студент 331 группы
Борис Агафонцев

Научный руководитель:
профессор В. И. Богачев

Москва
2009

1. Постановка задачи

Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть f — такая γ-измеримая функция, что при некотором выборе базиса $\{e_n\}$ в X для почти всех x для любого k отображение

$$(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}) \mapsto f(x + t_{i_1}e_{i_1} + t_{i_2}e_{i_2} + \dots + t_{i_k}e_{i_k}) \tag{1}$$

является многочленом степени не выше d по совокупности переменных.

Требуется доказать, что при соблюдении этих условий f — измеримый многочлен степени не выше d.

2. Решение

Без ограничения общности можем считать, что $X = \mathbb{R}^\infty$, γ — счётное произведение стандартных гауссовских мер на прямой и $\{e_n\}$ — стандартный базис: $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots)$.

Проведём индукцию по d. База индукции: для $d = 0$ утверждение верно по теореме 2.4.1 из [1] («закон 0–1»).

Пусть теперь $d > 0$ и для всех натуральных чисел меньших d утверждение доказано (т. е. предположим, что известно, что если отображение (1) — многочлен степени меньшей d, то и f — измеримый многочлен степени меньшей d). В частности, получаем, что $\frac{\partial f}{\partial e_1}$ — измеримый многочлен степени не выше $d-1$.

Рассмотрим $\frac{\partial f}{\partial e_1}$ как многочлен по переменной x_1. Тогда получаем следующее представление:

$$f(x) = \underbrace{x_1 \cdot p_1(x_2, \dots) + \dots + x_1^{d-1} \cdot p_{d-1}(x_2, \dots) + p_d\, x_1^d}_{f_1(x)} + g_1(x_2, \dots), \tag{2}$$

где p_i — измеримые многочлены степени не выше $d - i$; $g_1(x)$ не зависит от переменной x_1.

Далее, используя представление (2), повторяя рассуждения для каждого из векторов e_2, e_3, $\dots$, e_n, получим представление

$$f(x) = f_n(x) + g_n(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots), \tag{3}$$

где $f_n(x)$ — измеримые многочлены степени не выше d (на $\mathbb{R}^\infty$), g_n — произвольные функции, но не зависящие от первых n переменных.

Сразу заметим, что мы можем считать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n\, d\gamma_1 \dots d\gamma_n \equiv 0 \tag{4}$$

(интеграл от f_n по произведению первых n мер есть многочлен от x_{n+1}, x_{n+2}, ..., который мы можем отнести к функции g_n).

Докажем, что $\|f_n\|_{L^2}$ — ограничены.

Лемма 1. *Пусть h — измеримый многочлен с нулевым средним. Тогда для функции*

$$\phi_h(t) = \int\limits_{\Omega} \exp(ith) d\gamma \tag{5}$$

при достаточно малых t справедлива оценка

$$|1 - \phi_h(t)| \geqslant Ct^2 \cdot \|h\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{6}$$

где $C > \delta > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Разложим функцию $\phi_h(t)$ в ряд Тейлора в точке 0:

$$\phi_h(t) = \phi_h(0) + it \underbrace{\int\limits_{\Omega} h\, d\gamma}_{=0} - \frac{t^2}{2!} \int\limits_{\Omega} h^2 d\gamma + r(t,h).$$

Здесь $|r(t,h)| \leqslant \frac{t^3}{3!} \int_{\Omega} |h|^3\, d\gamma$. Оценивая требуемое выражение по модулю, получаем

$$|1 - \phi_h(t)| \geqslant \frac{t^2}{2!} \|h\|^2_{L^2} - \frac{t^3}{3!} \|h\|^3_{L^3}.$$

Чтобы доказать требуемую оценку, покажем, что при достаточно малых t выполнено неравенство

$$\frac{t^3}{3!} \|h\|^3_{L^3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2!} \|h\|^2_{L^2}.$$

Используя эквивалентность L^p-норм на многочленах (см. параграф 5.6 из [1]), заключаем, что окончательно требуется, чтобы при $t \to 0$ произведение $t\|h\|_{L^2}$ было ограничено сверху некоторой константой, например M, чего можно добиться. □

Лемма 2. *Пусть в представлении $f = f_n + g_n$ функции f_n зависят только от переменных x_1, x_2, ..., x_n, а функции g_n — от переменных x_{n+1}, x_{n+2}, ... Тогда последовательность $\{f_n\}$ ограничена по L_2-норме.*

Доказательство. Предположим, что $\|f_n\|_{L^2} \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \colon \|f_n\|_{L^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье функции f при малых t (для которых выполнена лемма 1):

$$\phi_f(t) = \int\limits_X e^{it(f_n+g_n)} d\gamma = \int\limits_X e^{itf_n} d\gamma \cdot \int\limits_X e^{itg_n} d\gamma. \tag{7}$$

Отсюда, используя оценку из леммы 1, получаем, что $\phi_f\big(\min\{t, \varepsilon\}\big) \leqslant \leqslant 1-C$, но $\phi(0) = 1$. Полученный результат противоречит непрерывности функции ϕ в нуле. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. *Пусть h — многочлен степени не выше d. Тогда выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\big(\mathbb{E}h^2/4 \leqslant h^2 < r\,\mathbb{E}h^2\big) \geqslant q, \tag{8}$$

где r и q — некоторые положительные константы, зависящие только от степени многочлена.

Доказательство. Представим интеграл $\mathbb{E}h^2$ в виде суммы интегралов по трём множествам:

$$\int\limits_X h^2\, d\gamma = \int\limits_{h^2<\mathbb{E}h^2/4} h^2\, d\gamma \ + \int\limits_{\mathbb{E}h^2/4\leqslant h^2<r\,\mathbb{E}h^2} h^2\, d\gamma \ + \int\limits_{h^2\geqslant r\,\mathbb{E}h^2} h^2\, d\gamma. \tag{9}$$

Первое слагаемое, очевидно, меньше $\mathbb{E}h^2/4$. А для последнего слагаемого по неравенствам Коши—Буняковского и Чебышева, а также по эквивалентности норм в L^2 и L^4 для многочленов, выполнена следующая оценка:

$$\int\limits_{h^2\geqslant r\,\mathbb{E}h^2} h^2\, d\gamma = \int\limits_X \mathrm{I}\{h^2 \geqslant r\,\mathbb{E}h^2\} \cdot h^2\, d\gamma \leqslant$$

$$\overset{\text{К.—Б.}}{\leqslant} \left(\int\limits_X h^4\, d\gamma\right)^{\frac12} \Big(\mathbf{P}\big(h^2 \geqslant r\,\mathbb{E}h^2\big)\Big)^{\frac12} =$$

$$= \|h\|_{L^4}^2 \cdot \sqrt{\mathbf{P}\big(h^2 \geqslant r\,\mathbb{E}h^2\big)} \overset{\text{экв.}}{\leqslant} p\,\|h\|_{L^2}^2 \cdot \sqrt{\mathbf{P}\big(h^2 \geqslant r\,\mathbb{E}h^2\big)} \overset{\text{Ч.}}{\leqslant}$$

$$\leqslant p\,\|h\|_{L^2}^2 \cdot \sqrt{\frac{\mathbb{E}h^2}{r\,\mathbb{E}h^2}} = \frac{p}{\sqrt{r}} \cdot \|h\|_{L^2}^2.$$

Таким образом, мы получили, что значения многочлена с положительной отделённой от нуля вероятностью лежат в некотором интервале, содержащем его среднее. $\square$

Рассмотрим теперь общий случай: f_n — измеримый многочлен степени d, зависящий от всех переменных; g_n — не зависит от переменных x_1, x_2, …, x_n.

Из леммы 3 следует, что для каждого многочлена f_n существует такое множество G наборов $y = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$, что $\gamma(G) \geqslant \widetilde{q} > 0$, на котором выполнено неравенство

$$\|f_n\|^2/4 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_n^2(y)\, d\gamma_1 \dots d\gamma_n < \widetilde{r}\, \|f_n\|^2 \tag{10}$$

(центральный интеграл есть многочлен степени $2d$ от переменных x_{n+1}, x_{n+2}, …).

Далее будем действовать аналогично доказательству леммы 2. Возьмём преобразование Фурье функции f и перепишем его, используя независимость g_n от первых n переменных и теорему Фубини:

$$\int\limits_X e^{itf} d\gamma = \int\limits_X e^{itf_n} \cdot e^{itg_n}\, d\gamma = \int\limits_X e^{itf_n} \bigotimes_{i=1}^{n} d\gamma_i \;\; e^{itg_n} \bigotimes_{i=n+1}^{\infty} d\gamma_i. \tag{11}$$

После интегрирования по первым n переменным, получаем выражение вида

$$\int v_n(t, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \cdot e^{itg_n} \bigotimes_{i=n+1}^{\infty} d\gamma_i. \tag{12}$$

По лемме 1 можем использовать оценку

$$\big| 1 - v_n(t, x_{n+1}, \dots) \big| \geqslant Ct^2 \cdot \|f_n(x_{n+1}, \dots)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{13}$$

но только в той области, где $t\|f_n(x_{n+1}, \dots)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < M$.

Рассмотрим указанные неравенства на множестве положительной меры G, используя неравенства (10). Тогда после интегрирования выражения (12) по этому множеству опять получается, что при предположении, что $\|f_n\|_{L^2} \to \infty$, нарушается непрерывность преобразования Фурье функции f в нуле.

Так как последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена по норме L^2, то можно считать, что последовательность средних арифметических $\left\{\frac{f_1+\dots+f_n}{n}\right\}$ сходится в L^2. Отсюда следует, что последовательность средних арифметических для последовательности $\{g_n\}$ также сходится. Переходим к представлению

$$f = \widetilde{f}_n + \widetilde{g}_n.$$

Докажем, что $\widetilde{g} = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{g}_n = \mathrm{const}$ почти всюду. На самом деле, для любого конечного натурального числа k

$$g_n = \frac{g_1 + \dots g_{k-1} + g_k + \dots + g_n}{n} = \frac{g_1 + \dots + g_{k-1}}{n} + \frac{g_k + \dots + g_n}{n}$$

где второе слагаемое не зависит от первых k переменных, а первое по-крайней мере поточечно сходится к 0. Таким образом, функция $\widetilde{g} = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{g}_n$ не зависит ни от какого конечного числа переменных, откуда следует, что $\widetilde{g} = \mathrm{const}$ п. в.

Отсюда $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n + c$, где f_n — измеримые многочлены степени d. Отсюда и f — измеримый многочлен степени d. Утверждение задачи доказано.

Список литературы

[1] Б о г а ч ё в В. И. Гауссовские меры. — М.: Наука. Физматлит, 1997.