БИЛЕТЫ

Билет 1. 3

Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.

Билет 2. 6

Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрической смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Билет 3. 8

Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.

Билет 4. 11

Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Билет 5. 16

Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

Билет 6. 20

Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Билет 7. 22

Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

Билет 8. 25

Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.

Билет 9. 27

Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

Билет 10. 35

Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

Билет 11. 42

Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция Вихрь

Билет 12. 48

Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли.

Билет 13. 52

Билинейные и квадратичные функции (формы). Приведение к нормальному виду.

Билет 14. 55

Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

Билет 15. 57

Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Билет 16. 60

Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.

Билет 17. 63

Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

Билет 18. 69

Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

Билет 19. 71

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

Билет 20. 76

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное

Билет 21. 80

Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Билет 22. 83

Элементарные функции комплексного переменного. Условие Коши – Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Билет 23. 90

Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

Билет 24. 98

Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

Билет 25. 103

Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности

Билет 26. 106

Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.

Билет 27. 108

Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

Билет 1.

Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.

Рассмотрим подмножество $X \subset \mathbb{R}$ и функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Определение. *f называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Замечание. *В терминах пределов это формулируется следующим образом: f непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$.*

Определение. *f называется непрерывной на множестве $Y \subset X$, если f непрерывна в каждой точке $x_0 \in Y$.*

Определение. *f называется равномерно непрерывной на множестве $Y \subset X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что если $x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Предложение. *Локальные свойства непрерывных функций.*

1) *Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ непрерывны в точке x_0.*

2) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(x)$ ограничена на $U(x_0) \cap X$.*

3) *Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, и $f(x_0) > 0$ (< 0). Тогда существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(x) > 0$ (< 0) на $U(x) \cap X$.*

4) *Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны в точке x_0, и $g(x_0) \neq 0$. Тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена в некоторой окрестности $U(x_0) \cap X$ (это следует из свойства 3), и непрерывна в точке x_0.*

Эти свойства тривиально следуют из соответствующих свойств пределов. Заметим, что свойства 1 и 4 обобщаются на функции, непрерывные на множестве.

Теорема. *Пусть $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$, функция $f\colon X \to Y$ непрерывна в точке x_0 и $g\colon Y \to Z$ непрерывна в $y_0 = f(x_0)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в x_0.*

Доказательство.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tau > 0$ такое, что из $|y - y_0| < \tau$ следует $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Далее $\exists \delta > 0$ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \tau$. Итак, при $|x - x_0| < \delta$, $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$.

$\square$

Теорема. (Коши о промежуточном значении). *Пусть функция $f\colon [a, b] \to R$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть, для определенности, $f(a) < f(b)$. Тогда $\forall x \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in [a, b]$, такое, что $f(c) = x$.*

Доказательство.

Построим по индукции систему отрезков $[a_k, b_k]$ таких, что $b_k - a_k = \dfrac{b - a}{2^k}$, $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, и $f(a_k) \leqslant x \leqslant f(b_k)$. Положим $[a_0, b_0] = [a, b]$. Далее, разобьем отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ пополам, $c_{k-1} = \dfrac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, и выберем тот из отрезков $[a_{k-1}, c_{k-1}]$ и $[c_{k-1}, b_{k-1}]$, образ которого содержит x. Если оба содержат x, то выбираем любой.

Полученная система отрезков удовлетворяет теореме о вложенных отрезках, согласно которой существует единственное c, $\{c\} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k]$. Кроме того, $f(a_k) \leqslant x$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(c)$, откуда $f(c) \leqslant x$. Рассмотрение $f(b_k)$ дает $f(c) \geq x$, откуда $f(c) = x$.

$\square$

Определение. *Подмножество $K \subset \mathbb{R}$ называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Иначе говоря, если $\{U_\alpha\}, \alpha \in A$ — система открытых множеств, такая, что $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, то существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, что $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.*

Лемма. (Бореля — Лебега). *Любой отрезок $[a, b]$ — компакт.*

Доказательство.

Предположим, что существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}, \alpha \in A$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Построим по индукции систему отрезков $[a_k, b_k]$ таких, что $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$, $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, и $\{U_\alpha\}$ образуют открытое покрытие $[a_k, b_k]$, из которого нельзя выбрать конечное. Положим $[a_0, b_0] = [a, b]$. Далее, разобьем отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ пополам, $c_{k-1} = \dfrac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, и выберем тот из отрезков $[a_{k-1}, c_{k-1}]$ и $[c_{k-1}, b_{k-1}]$, для которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Отметим, что если для обеих половин можно, то можно и для всего отрезка, что приводит к противоречию с предположением индукции.

В силу теоремы о вложенных отрезках, существует единственное c такое, что $\{c\} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k]$. Поскольку система $\{U_\alpha\}$ образует покрытие $[a, b]$, существует α такое, что $c \in U_\alpha$. В силу открытости U_α, существует такое ε, что $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_\alpha$. Далее, существует k такое, что $b_k - a_k < \varepsilon$. Поскольку $c \in [a_k, b_k]$, $[b_k, a_k] \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_\alpha$. Значит, указанный отрезок может быть покрыт одним множеством из системы $\{U_\alpha\}$, что противоречит выбору отрезка $[a_k, b_k]$. Полученное противоречие доказывает лемму.

$\square$

Следующие теоремы формулируются для компактов, в частности, они справедливы для отрезков по предыдущей лемме. Всюду ниже $K \subset \mathbb{R}$ — компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}$, f непрерывна на K.

Теорема. (Первая теорема Вейерштрасса). *В указанных условиях, f ограничена на K, то есть, существует $M > 0$, $|f(x)| < M\ \forall x \in K$.*

Доказательство.

Согласно свойству 2, для любого $x \in K$ существуют такие открытая окрестность $U(x)$ и число $M(x) > 0$, что $|f(y)| < M(x)\ \forall y \in K \bigcap U(x)$. Система множеств $U(x)$, $x \in K$, образует открытое покрытие K, и из него можно выбрать конечное подпокрытие $U(x_1), \ldots, U(x_n)$. Положим $M = \max\limits_i M(x_i)$, тогда $\forall x \in K$, $\exists i$ такое, что $x \in U(x_i)$, откуда $|f(x)| < M(x_i) \leqslant M$.

$\square$

Теорема. (Вторая теорема Вейерштрасса). *В указанных условиях, положим $m = \inf\limits_{x\in K} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in K} f(x)$. Они конечны по первой теореме. Тогда $\exists\, x_m, x_M$ такие, что $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$.*

Доказательство.

Докажем существование x_M, существование x_m получается аналогично. Предположим, что x_M не существует, тогда $f(x) < M\ \forall x \in K$. Отсюда, функция $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ определена и непрерывна на K (свойство 4). Легко видеть, что $g(x) > 0$. По первой теореме, существует $A > 0$, $g(x) < A$, $\forall x \in K$. Тогда $M - f(x) > \dfrac{1}{A}$, $f(x) < M - \dfrac{1}{A}$, и $M \neq \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

$\square$

Теорема. (Кантора). *В указанных условиях, f равномерно непрерывна на K.*

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. По определению непрерывной функции, $\forall x \in K\ \exists \delta(x)$ такое, что из $|y - x| < \delta(x), y \in K$ следует $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Положим $U(x) = \left(x - \dfrac{\delta(x)}{2}, x + \dfrac{\delta(x)}{2}\right)$ — эти интервалы образуют открытое покрытие K. Значит, из них можно выбрать конечное подпокрытие $U(x_1), \ldots, U(x_n)$. Положим $\delta = \min\limits_i \dfrac{\delta(x_i)}{2}$.

Пусть $|y - z| < \delta$, $y, z \in K$. Тогда $\exists i$ такое, что $y \in U(x_i)$, откуда $|y - x_i| < \delta < \delta(x_i)$. По неравенству треугольника, $|z - x_i| < 2\delta \leqslant \delta(x_i)$. Отсюда, $|f(y) - f(x_i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|f(z) - f(x_i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, поэтому $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, что и требовалось.

$\square$

Билет 2.

Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрической смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется функцией многих переменных. Ниже X будет считаться открытым множеством. Пусть $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Будем говорить, что $f(\bar{x}) = \bar{\bar{o}}(\bar{x})$, если $f(\bar{x})$ определена в окрестности 0, и $\dfrac{f(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \to 0$ при $\bar{x} \to 0$.

Определение. *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $\bar{x}_0 \in X$, если для некоторой линейной функции $L_f(\bar{x})$ для любого $\bar{x} \in X$ справедливо представление*

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = L_f(\bar{x} - \bar{x}_0) + \bar{\bar{o}}(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

При этом $L_f(\bar{x})$ называется дифференциалом функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$.

Геометрический смысл: $L_f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + L_f(\bar{x} - \bar{x}_0)$ является уравнением гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$. Дифференцируемость функции f в точке $\bar{x}_0$ тогда означает, что эта плоскость касается графика функции в f точке $\bar{x}_0$.

(В смысле определения: графики функций $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ касаются в точке $\bar{x}_0$, если $f(\bar{x}) - g(\bar{x}) = \bar{\bar{o}}(\bar{x} - \bar{x}_0)$. Между прочим, отсюда следует $f(\bar{x}_0) = g(\bar{x}_0)$.)

Фиксируем в $\mathbb{R}^n$ базис $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — дуальный базис, то есть $\xi_i(\bar{e}_j) = \delta_{ij}$ В частности, любой линейный функционал $L(\bar{x})$ раскладывается по нему следующим образом: $L = \sum\limits_{i=1}^{n} L(\bar{e}_i) \cdot \xi_i$.

Определение. *Частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\bar{x}}$ называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\bar{x} + \Delta x \cdot e_i) - f(\bar{x})}{\Delta x}$ если он существует.*

Эквивалентным этому является условие

$$f(\bar{x} + \Delta x \cdot \bar{e}_i) - f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\bar{x}} \Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x \cdot \bar{e}_i).$$

Лемма. *Если функция f дифференцируема в точке $\bar{x}$, то существуют все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\bar{x}}$, и $L = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\bar{x}} \cdot \xi_i$*

Доказательство.

Достаточно показать, что для для каждого i, $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\bar{x}}$ существует и равно $L(e_i)$. Вычисляем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \Delta x \cdot e_i) - f(\bar{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{L(\Delta x \cdot e_i) + \bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x L(e_i)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x} = L(e_i)$$

□

Определение. *Вектор $\operatorname{grad} f = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\bar{x}} \cdot \bar{e}_i$ называется градиентом функции.*

Если f дифференцируема в точке $\bar{x}$, то $L(\bar{y}) = \langle \operatorname{grad} f, \bar{y} \rangle$.

Теорема. *Если все частные производные функции $f(\bar{x})$ существуют в окрестности точки $\bar{x}$ и непрерывны в точке $\bar{x}$, то функция f дифференцируема в точке $\bar{x}$.*

Доказательство.

Фиксируем точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$, $\bar{y} - \bar{x} = \Delta\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x^i \cdot \bar{e}_i$. Положим $\bar{x}_k = \bar{x} + \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta x^i \cdot \bar{e}_i$. В частности, $\bar{x}_0 = \bar{x}$, $\bar{x}_n = \bar{y}$. Кроме того, $\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} = \Delta x^k \cdot \bar{e}_k$.

Из последнего равенства $f(\bar{x}_k) - f(\bar{x}_{k-1}) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{x}_{k-1}} \Delta x^k + \bar{\bar{o}}(\Delta x^k \cdot \bar{e}_k)$.

Суммируя по k, находим

$$f(\bar{y}) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{x}_{k-1}} \Delta x^k + \sum_{k=1}^{n} \bar{\bar{o}}(\Delta x^k \cdot \bar{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{x}_{k-1}} \Delta x^k + \bar{\bar{o}}(\Delta\bar{x}) =$$

Наконец, из непрерывности $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{y}}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{y}} - \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{x}} \to 0$ при $y \to x$, и $\left(\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{y}} - \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{x}}\right) \cdot \Delta x^k = \bar{\bar{o}}(\Delta\bar{x})$. Пользуясь этим, находим

$$f(\bar{y}) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{\bar{x}} \Delta x^k + \bar{\bar{o}}(\Delta\bar{x}) = \langle \operatorname{grad} f, \bar{y} - vx \rangle + \bar{\bar{o}}(\Delta\bar{x}).$$

$\square$

Билет 3.

Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.

Определение. *Разбиением T отрезка $[a,b]$ называется любой набор чисел $t_0,\dots,t_n$ такой, что $a=t_0<\dots<t_n=b$.*

Определение. *Число $d(T)=\max\limits_{k=1\dots n}(t_k-t_{k-1})$ называется диаметром разбиения T.*

Определение. *Разбиение T с дополнительно выбранными точками $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,\dots,n$, называется размеченным разбиением и обозначается T_ξ.*

Рассмотрим для каждого $\delta>0$ множество таких T_ξ, что $d(T_\xi)<\delta$. Эти множества образуют базу на множестве всех размеченных разбиений. Эта база обозначается $d(T)\to 0$.

Рассмотрим функцию $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

Определение. *Интегральной суммой функции f относительно разбиения T_ξ называется*

$$\sigma(f,T_\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(t_k-t_{k-1}).$$

Определение. *Если существует предел $I=\lim\limits_{d(T)\to 0}\sigma(f,T_\xi)$, то он называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a,b]$, и обозначается*

$$I=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда, следующие свойства определенного интеграла легко следуют из аналогичных свойств интегральных сумм и предельных переходов.

1) $\int\limits_a^b \lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)dx=\lambda_1\int\limits_a^b f(x)dx+\lambda_2\int\limits_a^b g(x)dx.$

2) Если $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\leqslant\int\limits_a^b g(x)dx.$

3) $\Big|\int\limits_a^b f(x)dx\Big|\leqslant\int\limits_a^b|f(x)|dx.$

4) Если c — константа, то $\int\limits_a^b c\,dx=c(b-a).$

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.*

Доказательство.

Проверим критерий Коши существования предела по базе. Для этого выберем $\varepsilon>0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, она равномерно непрерывна на нем, и существует такое

$\delta > 0$, что $\forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta$, справедливо $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Рассмотрим множество $B = \{T_\xi | d(T) < \delta\}$ — одно из множеств, образующих базу. Согласно критерию Коши, достаточно показать, что $\sup\limits_{T^1_\zeta, T^2_\eta \in B} |\sigma(f, T^1_\zeta) - \sigma(f, T^2_\eta)| \leqslant \varepsilon$. Для этого, проверим для произвольных $T^1_\zeta, T^2_\eta \in B$ неравенство $|\sigma(f, T^1_\zeta) - \sigma(f, T^2_\eta)| \leqslant \varepsilon$.

Положим $T = T^1 \cup T^2$ — объединяем "разбивающие" точки как упорядоченные наборы. Выберем $\xi_k = t_k$ для всех точек T, получим размеченное разбиение T_ξ. Оценим

$$|\sigma(f, T^1_\zeta) - \sigma(f, T_\xi)| = \Big| \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)(t^1_k - t^1_{k-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \Big| =$$

здесь m — число точек в разбиении T^1, n — число точек в разбиении T. Далее, отрезки разбиения T получаются разбиением отрезков T^1 точками разбиения T^2. Поэтому можно определить $k(i)$ условием $[t_{i-1}, t_i] \subset [t^1_{k(i)-1}, t^1_{k(i)}]$. Далее, $\sum\limits_{i:k(i)=k} (t_i - t_{i-1}) = t_k - t_{k-1}$ — длина отрезка равна сумме длин его частей. Пользуясь этим, можно перейти в первой сумме к суммированию по i и привести подобные слагаемые:

$$= \Big| \sum_{k=1}^{m} \sum_{i:k(i)=k} f(\zeta_{k(i)})(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{i=1}^{n} (f(\zeta_{k(i)}) - f(\xi_i))(t_i - t_{i-1}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\zeta_{k(i)}) - f(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) \leqslant$$

пользуясь тем, что $|\zeta_{k(i)} - \xi_i| < \delta$, поскольку они лежат на одном отрезке разбиения T^1, диаметр которого меньше δ, получаем из определения δ

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Аналогично, $|\sigma(f, T^1_\zeta) - \sigma(f, T_\xi)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда, по неравенству треугольника, $|\sigma(f, T^1_\zeta) - \sigma(f, T^2_\eta)| \leqslant \varepsilon$, что и требовалось.

□

Определение. *Функция* $F(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *называется первообразной функции* $f(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *если* $F(x)$ *дифференцируема на* (a,b) *и* $F'(x) = f(x)$ *для любого* $x \in (a,b)$.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Обозначим* $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$. *Тогда* $F(x)$ *является первообразной для функции* $f(x)$.

Доказательство.

Фиксируем произвольное $x_0 \in (a, b)$, тогда

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\, dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x) + f(x_0) - f(x_0)\, dx =$$

$$= f(x_0)\Delta x + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))\, dx.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f в точке x_0, существует δ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если $\Delta x < \delta$, то $|x - x_0| < \delta$ для любого x из отрезка интегрирования в рассматриваемом интеграле. Пользуясь этим,

$$\Big|\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\Big| = \frac{1}{\Delta x}\Big| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x) - f(x_0))\, dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(x) - f(x_0)|\, dx \leqslant \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varepsilon\, dx = \varepsilon.$$

Итак, если $\Delta x < \delta$, то $\Big|\dfrac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\Big| \leqslant \varepsilon$, и такое δ существует для любого ε. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0),$$

то есть $F'(x_0) = f(x_0)$.

$\square$

Билет 4.

Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Теорема. (О существовании и непрерывности неявной функции). *Пусть функция $F(x^1, \ldots, x^n, u)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности U точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0)$, строго возрастает по u при каждом фиксированном наборе $x^1, \ldots, x^n$, и*

$$F(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0) = 0.$$

Тогда существует окрестность V точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, и в ней единственная функция $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$, такая, что

1) $F(x^1, \ldots, x^n, \varphi(x^1, \ldots, x^n)) = 0$, $\forall (x^1, \ldots, x^n) \in V$;

2) $\varphi(x_0^1, \ldots, x_0^n) = u_0$;

3) φ непрерывна в V.

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $I = [u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$ таков, что $\{(x_0^1, \ldots, x_0^n)\} \times I \subset U$. Тогда $F(x_0^1, \ldots, x_0^n, u)$ как функция u возрастает на I, откуда $F(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0 + \varepsilon) > 0$. В силу непрерывности функции F в этих точках, существует окрестность V точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ такая, что $F(x^1, \ldots, x^n, u_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x^1, \ldots, x^n, u_0 + \varepsilon) > 0$ при $(x^1, \ldots, x^n) \in V$. V можно выбрать так, что $V \times I \subset U$. Тогда для каждого $(x^1, \ldots, x^n) \in V$, в силу непрерывности функции $F(x^1, \ldots, x^n, u)$ на I по u и теоремы Коши о промежуточном значении, существует такое $u = \varphi(x^1, \ldots, x^n) \in I$, что $F(x^1, \ldots, x^n, u) = 0$. Итак, построена функция φ, удовлетворяющая условию 1.

Для каждого $(x^1, \ldots, x^n) \in V$, в силу строго возрастания $F(x^1, \ldots, x^n, u)$ по u на I, найдется лишь одно $u \in I$ такое, что $F(x^1, \ldots, x^n, u) = 0$. Отсюда вытекает единственность функции φ. Кроме того, взяв $(x^1, \ldots, x^n) = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, получим $u = u_0$, что доказывает пункт 2.

Наконец, заметим, что построенная функция φ обладает свойством $\varphi(x^1, \ldots, x^n) \in I$ при $x^1, \ldots, x^n \in V$, иначе говоря, $|\varphi(x^1, \ldots, x^n) - \varphi(x_0^1, \ldots, x_0^n)| \leqslant \varepsilon$. Возьмем произвольное $\varepsilon' < \varepsilon$, и построим аналогичным методом функцию φ' на окрестности множестве V'. Пусть $D = V \cap V'$, тогда на D в силу единственности $\varphi = \varphi'$, следовательно, $|\varphi(x^1, \ldots, x^n) - \varphi(x_0^1, \ldots, x_0^n)| \leqslant \varepsilon'$ на D. Поскольку ε' произвольно, получаем непрерывность φ в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

Возьмем любую другую точку $x^1, \ldots, x^n \in V$, положим $u = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$. Существует окрестность точки $(x^1, \ldots, x^n, u)$, лежащая в U, и в ней применима уже доказанная часть теоремы о неявной функции (но на этот раз для "центральной"точки $(x^1, \ldots, x^n, u)$). Согласно ей, существует окрестность V' точки $x^1, \ldots, x^n$ и функция φ' на V', которая, в частности, непрерывна в $x^1, \ldots, x^n$ — это уже доказано! Можно выбрать $V' \subset V$, тогда, в силу единственности, $\varphi' = \varphi$ на V', значит, φ непрерывна в $x^1, \ldots, x^n$. В силу произвольности $x^1, \ldots, x^n$, φ непрерывна на V.

□

Теорема. (О дифференцировании неявной функции).

Пусть функция $F(x^1, \ldots, x^n, u)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и дифференцируема в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0)$. Тогда функция φ будет дифференцируема в точке $x_0^1, \ldots, x_0^n$, и

$$\varphi_{x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) = -\frac{F_{x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0)}{F_u(x_0^1, \ldots, x_0^n, u_0)}$$

Доказательство.

Рассмотрим теперь произвольное $(\Delta x^1, \dots, \Delta x^n)$, пусть $\Delta u = \varphi(x_0^1 + \Delta x^1, \dots, x_0^n + \Delta x^n) - \varphi(x^1, \dots, x^n)$ (считаем приращения достаточно малыми, чтобы точки лежали в V). Тогда

$$0 = F(x_0^1 + \Delta x^1, \dots, x_0^n + \Delta x^n, u_0 + \Delta u) - F(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) =$$
$$= (F_{x^1}(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) + \alpha^1)\Delta x^1 + \dots + (F_{x^n}(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) + \alpha^n)\Delta x^n +$$
$$+ (F_u(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) + \beta)\Delta u$$

первое равенство следует из определения неявной функции, второе – дифференцируемость F в точке $(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0)$. $\alpha^1, \dots, \alpha^n, \beta$ – функции от $(\Delta x^1, \dots, \Delta x^n, \Delta u)$, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю аргументов.

Можно считать α^i и β функциями от $(\Delta x^1, \dots, \Delta x^n)$, поскольку Δu есть функция от $(\Delta x^1, \dots, \Delta x^n)$, и она стремится к нулю при стремлении к нулю аргументов (из непрерывности φ). Тогда

$$\Delta u = -\frac{(F_{x^1}(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) + \alpha^1)\Delta x^1 + \dots + (F_{x^n}(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) + \alpha^n)\Delta x^n}{F_u(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) + \beta}$$

что, согласно известным правилам обращения с бесконечно малыми $\left(\frac{1}{C + \bar{\bar{o}}(1)} = \frac{1}{C} + \bar{\bar{o}}(1)\right)$, переписывается в виде

$$\Delta u = -\frac{F_{x^1}(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0)}{F_u(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0)}\Delta x^1 - \dots - \frac{F_{x^n}(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0)}{F_u(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0)}\Delta x^n +$$
$$+ \bar{\bar{o}}(\Delta x^1, \dots, \Delta x^n)$$

что и требовалось.

□

Можно сформулировать условия теоремы так: F определена и дифференцируема в U, F_u непрерывна в U, $F(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) = 0$, $F_u(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0) > 0$. В силу непрерывности F_u, получим $F_u > 0$ в некоторой (возможно, меньшей, чем U) окрестности $(x_0^1, \dots, x_0^n, u_0)$, которую можно взять за U. Тогда F строго возрастает по u (это легко следует, например, из теоремы Лагранжа о промежуточном значении), и условия теоремы выполнены. Более того, тогда φ будет дифференцируема в любой точке V, что доказывается аналогично доказательству непрерывности в любой точке.

Отметим еще, что в предыдущих теоремах можно вместо возрастания требовать убывания, соответственно вместо положительности производной – ее отрицательности.

Перейдем к обсуждению случая неявных отображений. Все $\bar{\bar{o}}(x)$ ниже понимаются в смысле определения билета 2, то есть при $x \to 0$.

Рассмотрим отображение $F : R^m \to R^n$. Его естественным образом можно представить как семейство n функций m переменных $F_1, \dots, F_n$,

$$F(x^1, \dots, x^m) = \big(F_1(x^1, \dots, x^m), \dots, F_n(x^1, \dots, x^m)\big)$$

Будем записывать это кратко как $F = (F_1, \dots, F_n)$.

Определение. *Отображение F называется дифференцируемым в точке $x \in R^m$, если оно определено в некторой окрестности $U(x)$ точки x, и существует линейное отображение $A : R^m \to R^n$ такое, что $\forall h \in R^m$ такого, что $x + h \in U(x)$ справедливо представление*

$$F(x + h) = F(x) + Ah + \alpha(h)$$

причем $\alpha(h) = \overline{\overline{o}}(h)$ (в смысле $||\alpha(h)|| = \overline{\overline{o}}(h)$, поскольку α тоже является отображением из R^m в R^n).

Запишем $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Тогда легко видеть, что $\alpha(h) = \overline{\overline{o}}(h) \Leftrightarrow \alpha_i(h) = \overline{\overline{o}}(h)$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим матрицу отображения $A = ||a_{ij}||$ и запишем предыдущее определение в координатах:

$$F_i(x+h) = F_i(x) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} h^j + \alpha_i(h), \quad \alpha_i = \overline{\overline{o}}(h), \quad i = 1, \dots, n$$

Теперь видно, что это условие эквивалентно дифференцируемости всех компонент F_i в точке x, причем $a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Отсюда вытекает едиственность отображения A.

Определение. *Отображение A называется дифференицалом отображения F, а его матрица – матрицей Якоби отображения F.*

Теорема. (О неявном отображения). *Пусть*

Пусть отображение $F(x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^n) : R^{m+n} \to R^n$ определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности $U(M)$ точки $M = (x_0^1, \dots, x_0^m, u_0^1, \dots, u_0^n)$ и $F(M) = 0$. Рассмотрим следующий определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u^n} \end{vmatrix}$$

и обозначим его $\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(u^1, \dots, u^n)}$. Пусть $\left.\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(u^1, \dots, u^n)}\right|_M \neq 0$. Тогда существует окрестность V точки $(x_0^1, \dots, x_0^m)$, и в ней единственное отображение $\varphi(x^1, \dots, x^m) : R^m \to R^n$, такое, что

1) $F(x^1, \dots, x^m, \varphi_1(x^1, \dots, x^m), \dots, \varphi_n(x^1, \dots, x^m)) = 0$ *для любой точки* $(x^1, \dots, x^m) \in V$;

2) $\varphi(x_0^1, \dots, x_0^m) = (u_0^1, \dots, u_0^n)$;

3) φ *непрерывно и дифференцируемо в* V.

Доказательство.

Будем вести доказательство индукцией по n. Отметим, что основанием индукции ($n = 1$) является теорема о неявной функции. Будем проводить шаг индукции.

Обозначим определитель $\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(u^1, \dots, u^n)}$ через Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u^n} \end{vmatrix}$$

Обозначим алгебраические дополнения к элементам последнего столбца через Δ_k, тогда

$$\Delta = \sum_k \Delta_k \frac{\partial F_k}{\partial u^n}$$

Из условия, $\Delta|_M \neq 0$, в силу чего существует такое k, что $\Delta_k|_M \neq 0$ и $\frac{\partial F_k}{\partial u^n}|_M \neq 0$. Перенумеруем функции F_i так, чтобы было $k = n$.

Отметим, что $\Delta_n = \frac{D(F_1,\dots,F_{n-1})}{D(u^1,\dots,u^{n-1})}$. Условие $\Delta_n|_M \neq 0$ позволяет применить предположение индукции, и построить окрестность V_1 точки $M_1 = (x^1_0,\dots,x^m_0,u^n_0)$, и в ней единственное отображение $\Phi(x^1,\dots,x^m,u^n): R^{m+1}\to R^{n-1}$, такое, что

1) $F_i(x^1,\dots,x^m,\Phi_1(x^1,\dots,x^m,u^n),\dots,\Phi_{n-1}(x^1,\dots,x^m,u^n),u^n)=0$ для любой точки $(x^1,\dots,x^m,u^n)\in V_1$ и любого $i=1,\dots,n-1$.

2) $\Phi(x^1_0,\dots,x^m_0,u^n_0)=(u^1_0,\dots,u^{n-1}_0)$;

3) Φ непрерывно и дифференцируемо в V_1.

Дифференцируя равенство в пункте 1 по u^n, получим

$$0=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial F_i}{\partial u^k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial u^n}+\frac{\partial F_i}{\partial u^n}$$

для каждого $i=1,\dots,n-1$. Определим теперь функцию

$$\Psi(x^1,\dots,x^m,u^n)=F_n(x^1,\dots,x^m,\Phi_1(x^1,\dots,x^m,u^n),\dots,\Phi_{n-1}(x^1,\dots,x^m,u^n),u^n).$$

Эта функция определена, непрерывна и дифференцируема в V_1, и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial F_n}{\partial u^k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial u^n}+\frac{\partial F_n}{\partial u^n}$$

Это уравнение сходно с предыдущими для $i=n$ (только слева не 0). Умножим все эти равенства для $i=1,\dots,n$ на Δ_i и сложим, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u^n}\Delta_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial F_i}{\partial u^k}\frac{\partial \Phi_k}{\partial u^n}+\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\frac{\partial F_i}{\partial u^n}=$$

вторая сумма справа равна в точности Δ, а в первой изменим порядок суммирования

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial \Phi_k}{\partial u^n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i\frac{\partial F_i}{\partial u^k}+\Delta=\Delta,$$

поскольку в первой сумме каждая сумма по i равна 0 (ее образуют произведения элементов столбца на алгебраические дополнения к элементам другого столбца – т.н. фальшивое разложение; оно равно 0, поскольку равно разложению определителя с двумя одинаковыми столбцами, который равен 0).

Из $\Delta|_M\neq 0$ следует, что $\frac{\partial\Psi}{\partial u^n}|_{M_1}\neq 0$. При этом $\Psi(M_1)=F_n(M)=0$ (это равенство проверяется непосредственной подстановкой, учитывая свойство 2 отображения Φ), в силу чего к функции Ψ применима теорема о неявной функции (данная теорема при $n=1$). По ней, существует окрестность V точки $(x^1_0,\dots,x^m_0)$, и в ней единственная функция $\psi(x^1,\dots,x^m): R^m\to R$ такая, что

1) $\Psi(x^1,\dots,x^m,\psi(x^1,\dots,x^m))=0$ для любой точки $(x^1,\dots,x^m)\in V$;

2) $\psi(x^1_0,\dots,x^m_0)=u^n_0$;

3) ψ непрерывна и дифференцируема в V.

Полагаем $\varphi_n = \psi$, $\varphi_i(x^1, \dots, x^m) = \Psi_i(x^1, \dots, x^m, \psi(x^1, \dots, x^m))$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда эти функции определены, непрерывны и дифференцируемы в V. Непосредственной подстановкой проверяется, что эти функции удовлетворяют условиям 1,2: условие 1 для координат $1, \dots, n-1$ следует из свойств отображения Φ, для координаты n – из свойства 1 отображения ψ. Условие 2 следует из свойств 2 отображения Φ и функции ψ.

$\square$

Билет 5.

Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

Определение. *Числовым рядом называется формальная сумма*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{1}$$

$x_k \in R$.

Определение. *Частной суммой ряда (1) называется*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Определение. *Ряд (1) называется сходящимся, если существует предел*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

при этом S называется суммой ряда (1), запись:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Теорема. (Критерий сходимости Коши). *Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда для любого ε существует такое N, что для всех $m, n > N$*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} x_k\right| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

Легко видеть, что $\sum\limits_{k=m}^{n} x_k = S_n - S_{m-1}$. После этого утверждение превращается в критерий Коши сходимости последовательности S_n.

□

Предложение. (Необходимое условие). *Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.*

Доказательство.

Согласно свойствам предела, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$. Отсюда, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$.

□

Определение. *Ряд (1) называется знакоположительным, если $\forall k$, $x_k \geq 0$.*

Лемма. *Знакоположительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность S_n ограничена.*

Доказательство.

Если ряд сходится, то S_n ограничена как сходящаяся последовательность. Обратно, $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, поэтому последовательность S_n не убывает. Тогда ее сходимость следует из ограниченности по теореме Вейерштрасса.

$\square$

Теорема. (Оценочный признак). *Пусть есть два ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, *причем* $\forall k$, $y_k \geq x_k \geq 0$. *Тогда, если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится.*

Доказательство.

Из условия $y_k \geq x_k$ следует, что $S_k^y \geq S_k^x$ (по индукции). С другой стороны, из сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, последовательность S_k^y ограничена, поэтому и S_k^x ограничена, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.

$\square$

Теорема. (Признак Даламбера). *Рассмотрим ряд (1), пусть он знакоположительный, и* $\forall n$, $x_n \neq 0$. *Пусть существует предел* $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Тогда, если* $r > 1$, *то ряд расходится, а если* $r < 1$, *то ряд сходится.*

Доказательство.

Если $r > 1$, то, для достаточно больших n, $\frac{x_{n+1}}{x_n > 1}$, т.е. $x_{n+1} \geq x_n$, поэтому x_n не стремится к 0, откуда ряд расходится.

Пусть $r < 1$, тогда $\exists k, q < 1$ такие, что для $n > k$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < q$, откуда $x_{n+k} \leq q^n x_k$. Поэтому, $S_{n+k} \leq S_{k-1} + \sum\limits_{r=0}^{n} q^r x_k = S_{k-1} + x_k \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leq S_{k-1} + \frac{x_k}{1-q}$. Из ограниченности следует сходимость ряда.

$\square$

Теорема. (Интегральный признак). *Пусть* $f(x) : (0, \infty) \to R$ – *неотрицательная невозрастающая функция. Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty}$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ *сходятся одновременно.*

Доказательство.

В одну сторону, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx =$ (здесь использовано невозрастание $f(x)$) $= \int\limits_1^{k} f(x)dx \leq \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ (здесь использована неотрицательность $f(x)$). Из ограниченности частных сумм следует сходимость ряда.

В другую сторону, пусть ряд сходится, тогда последовательность частных сумм ограничена. Далее, $F(x) = \int\limits_1^{x} f(t)dt \leq \int\limits_1^{n} f(t)dt =$ (для подходящего $n > x$, из неотрицательности $f(x)$) $= \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)dx = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k) = S_{k-1}$. Отсюда функция $F(x)$ ограничена. В силу неотрицательности $f(x)$, она не убывает, а потому имеет предел (теорема Вейерштрасса).

$\square$

Теорема. (Признак Дирихле). *Пусть последовательность α_n не возрастает и стремится к 0 при $n \to \infty$. Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$, частные суммы S_n которого ограничены. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ сходится.*

Доказательство.

Пусть $|S_n| < M \ \forall n$. Запишем признак Коши и преобразум его (это называется преобразованием Абеля):

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k a_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k (S_k - S_{k-1})\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k S_k - \sum_{k=n}^{m} \alpha_k S_{k-1}\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k S_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} \alpha_{k+1} S_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=n}^{m-1} S_k(\alpha_k - \alpha_{k+1}) - \alpha_n S_{n-1} + \alpha_m S_m\right| \leq$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} |S_k||\alpha_k - \alpha_{k+1}| + |\alpha_n||S_{n-1}| + |\alpha_m||S_m| \leq$$

$$\leq M(\sum_{k=n}^{m-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + |\alpha_n| + |\alpha_m| =$$

$$= M(\alpha_n - \alpha_m + |\alpha_n| + |\alpha_m|) \leq 4M\alpha_n \to 0$$

при $n \to \infty$.

□

Определение. *Ряд (1) называется знакочередующим, если x_{n+1} и x_n имеют противоположные знаки для каждого n.*

Теорема. (Признак Лейбница). *Рассмотрим знакочередующий ряд вида (1). Если последовательность $|x_n|$ не возрастает и стремится к 0, то он сходится.*

Доказательство.

Предположим для определенности, что $x_1 > 0$, тогда $x_n = (-1)^{n+1}|x_n|$. Положим $\alpha_n = |x_n|$, $a_n = (-1)^{n+1}$. Указанные последовательности удовлетворяют всем условиям признака Дирихле, из которой и следует утверждение.

□

Теорема. (Признак Абеля). *Пусть ряд (1) сходится, а последовательность α_n монотонна и имеет предел. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ сходится.*

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A$, тогда $\alpha_n = \beta_n + A$, где β_n монотонна и стремится к 0. Пусть, для определенности, она убывает (иначе рассматривается $-\beta_n$). Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A x_k$. Первый ряд сходится по признаку Дирихле (частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ ограничены, так как он сходится), а второй есть результат умножения сходящегося ряда на константу.

$\square$

Билет 6.

Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Предложение. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство.

Положим $a_k = |x_k| + x_k$, $b_k = |x_k| - x_k$. Оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ знакоположительны, и $a_k < |x_k|$, $b_k < |x_k|$, поэтому они сходятся по признаку сравнения для знакоположительных рядов. Далее, $x_k = \frac{a_k - b_k}{2}$, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.

□

Определение. *Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то он называется сходящимся условно.*

Теорема. *Любая перестановка членов абсолютно сходящегося ряда приводит к абсолютно сходящемуся ряду с той же суммой.*

Доказательство.

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = S$. Фиксируем произвольную перестановку σ. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку исходный ряд сходится абсолютно, существует N такое, что $\forall m \geq n > N$, $\sum\limits_{k=n}^{m} |x_k| < \varepsilon$. (Критерий Коши). Далее, существует такое K, что $\sigma(1) < K, \ldots, \sigma(N) < K$.

Рассмотрим любые $m \geq n > K$, существует такое M, что $\sigma^{-1}(n) < M, \ldots, \sigma^{-1}(m) < M$, тогда тогда $\sum\limits_{k=n}^{m} |x_{\sigma(k)}| \leq \sum\limits_{k=N+1}^{M} |x_k| \leq \varepsilon$ (последняя сумма включает все слагаемые первой, и еще некоторые неотрицательные). По критерию Коши, ряд абсолютно сходится.

Наконец, пусть $n > K$, тогда $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} \right| = \left| S - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k - \sum\limits_{k=1..n, \sigma(k)>N} x_k \right| \leq \left| S - \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \right| + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |x_k| \leq 2\varepsilon$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = S$.

□

Замечание. Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить любую сумму (теорема Римана), но доказательство этого факта в билеты не входит.

Рассмотрим два ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Тогда их (формальным) произведением называется ряд из всевозможных попарных произведений в некотором порядке $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{p_k} b_{q_k}$. Если этот ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка слагаемых. В этом случае она называется суммой произведения рядов.

Теорема. (Коши). *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно, то их произведение сходится абсолютно к сумме, равной произведению сумм указанных рядов.*

Доказательство.

Рассмотрим произвольный порядок $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{p_k} b_{q_k}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $\forall m \geq n > 0$, $\sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \sqrt{\varepsilon}$, $\sum\limits_{k=n}^{m} |b_k| < \sqrt{\varepsilon}$ (Критерий Коши). Существует такое $K > 0$, что при $k > K$ верно $p_k > N$ и $q_k > N$. Выберем $m \geq n > K$. Существует такое M, что $M > p_k$, $M > q_k$ при $k = n, \ldots, m$. Тогда $\sum\limits_{k=n}^{m} |a_{p_k}||b_{p_k}| \leq \sum\limits_{k=N}^{M} |a_k| \cdot \sum\limits_{k=N}^{M} |b_k| < \varepsilon$. Отсюда, по критерию Коши, ряд сходится абсолютно.

Теперь можем расставить члены ряда в удобном для нас порядке. Запишем $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + \ldots$. Частные суммы этого ряда с номером n^2 равны $S_{n^2} = S_n^a S_n^b$ и сходятся к $S^a S^b$ – произведению сумм рядов. Но поскольку последовательность частных сумм этого ряда сходится, ее предел равен пределу указанной подпоследовательности.

$\square$

Билет 7.

Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

Рассмотрим последовательность функций $f_k(x) : X \to R$, $k = 1, \ldots$. X здесь пусть будет произвольным множеством (эта общность понадобится в дальнейшем).

Определение. *Функциональным рядом называется ряд вида* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. *Его сумма* $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *определяется поточечно как сумма соответствующего числового ряда. Соответственно, он определена там, где ряд сходится.*

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *называется сходящимся равномерно, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ *такое, что* $\forall x \in X$, $\forall n > N$, $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. $S_n(x)$ *здесь, как и прежде, частная сумма.*

Теорема. (Признак Вейерштрасса). *Если существует ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, *знакоположительный и сходящийся, причем* $f_k(x) < c_k$ $\forall x \in X, \forall k$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* x.

Доказательство.

Во-первых, ряд $f_k(x)$ абсолютно сходится для каждого x по оценочному признаку. Теперь проверим равномерную сходимость. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, существует такое N, что $\forall n > N$, $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k < \varepsilon$. Тогда $\forall n > N, \forall x \in X$, $|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k < \varepsilon$.

$\square$

Пусть $\mathbf{B}$ – некоторая база на X.

Теорема. *Если при каждом* k *существует* $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_k(x)$, *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно по* $x \in X$, *то*

$$\lim_{\mathbf{B}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\mathbf{B}} f_k(x)$$

причем выражения с обоих сторон равенства определены.

Доказательство.

Обозначим частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ через $S_n(x)$, сумму этого ряда через $S(x)$, $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_k(x) = c_k$. Проверим сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ по критерию Коши. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ такое, что $\forall x \in X$, $\forall n \geq N$, $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. По неравенству треугольника, $\forall x \in X$, $\forall m \geq n > N$, $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = |S_m(x) - S_{n-1}(x)| \leq \varepsilon$. Это конечная сумма, поэтому в ней можно перейти к пределу по $\mathbf{B}$. Отсюда, $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} c_k\right| < \varepsilon$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится.

Обозначим частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ через a_n, сумму этого ряда через A. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое N, что $\forall x \in X$, $\forall n > N$, $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Существует $n > N$ такое, что $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$. Наконец, существует такое $B \in \mathbf{B}$, что $\forall k \le n$, $|f_k(x) - \lim\limits_{\mathbf{B}} f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3k}$, откуда $|S_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Суммируя эти неравенства и используя неравенство треугольника, находим $|S(x) - A| < \varepsilon \ \forall x \in B$, т.е. $\lim\limits_{\mathbf{B}} S(x) = A$.

$\square$

Теорема. *Пусть $X \subset R$, и все $f_k(x)$ непрерывны на X. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на X. Тогда его сумма $S(x)$ непрерывна на X.*

Доказательство.

Фиксируем $x_0 \in X$, и проверим непрерывность в точке x_0. Выберем $\mathbf{B} = X \ni x \to x_0$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_k(x) = f_k(x_0)$ (в силу непрерывности), и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathbf{B}} f_k(x) = S(x_0)$. Отсюда, по предыдущей теореме, существует $\lim\limits_{\mathbf{B}} S(x) = S(x_0)$.

$\square$

Теорема. *Пусть $u_k(x)$ определены и интегрируемы на $[a, b]$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно. Тогда*

$$\int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_k(x)dx$$

причем выражения с обоих сторон равенства определены.

Доказательство.

Рассмотрим в качестве X множество всех размеченных разбиений отрезка $[a, b]$, в качестве $\mathbf{B}$ – базу $d(T) \to 0$, $f_k(T_\xi) = \sigma(u_k(x), T_\xi)$. Достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(T_\xi)$ сходится равномерно и использовать теорему о предельном переходе.

Отметим, что этот ряд сходится для любого $T_\xi \in X$, поскольку представляет собой конечную линейную комбинацию рядов для $f_k(x)$. Обозначим его сумму $S(T_\xi)$, частные суммы $S_n(T_\xi)$. В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ такое, что $\forall x \in X$, $\forall n > N$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Тогда $\forall n > N$, $\forall T_\xi \in X$, $T_\xi = (t_0, \dots, t_m), (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{r=1}^{m} (\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\xi_r) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\xi_r))(t_r - t_{r-1})\right| \le \sum\limits_{r=1}^{m} \frac{\varepsilon}{b-a}(t_r - t_{r-1}) = \varepsilon$.

$\square$

Теорема. *Пусть $X = (a, b)$, все $f_k(x)$ дифференцируемы на X, и ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ сходится равномерно на (a, b). Пусть $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке. Тогда $S(x)$ определена на (a, b), дифференцируема на (a, b), и*

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Доказательство.

В силу равномерной сходимости ряда из производных, $\forall \varepsilon > 0$, существует такое $N > 0$, что $\forall x \in X$, $\forall m \geq n > N$, $\left| \sum\limits_{k=n}^{m} f'_k(x) \right| < \varepsilon$. Обозначим $F(x) = \sum\limits_{k=n}^{m} f_k(x)$. Фиксируем $x_0 \in X$. Тогда, по теореме Лагранжа, $\left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \right| = |F'(c)| = \left| \sum\limits_{k=n}^{m} f'_k(x) \right| < \varepsilon$. Обозначив $u_k(x) = \frac{f_k(x)-f_k(x_0)}{x-x_0}$, получаем, что $\left| \sum\limits_{k=n}^{m} u_k(x) \right| < \varepsilon$, поэтому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится (критерий Коши). Более того, переходя в этом равенстве к пределу по $m \to \infty$, получаем $\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = \left| \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon$, что означает равномерную сходимость этого ряда.

Пусть x_0 – точка, где ряд сходится. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \cdot (x - x_0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$, поэтому этот ряд сходится, и $S(x)$ определено на всм x.

Пусть теперь x_0 произвольно в X. $\frac{S(x)-S(x_0)}{x-x_0} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно по x. Выбирая базу $\mathbf{B} = x \to x_0$ и применяя теорему о предельном переходе, получаем искомое утверждение.

$\square$

Билет 8.

Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.

Определение. *Степенным рядом называется функциональный ряд вида* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$, c_k *– произвольные числа. Можно рассматривать случаи* $x \in R$ *или* $x \in C$.

Предложение. *Если ряд сходится в точке* x_0*, то для любого* ε *он сходится равномерно на круге* $|x| \le |x_0| - \varepsilon$.

Доказательство.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_0^k$ сходится, его слагаемые ограничены $c_k x_0^k \le M$. Тогда $|c_k x^k| = |c_k x_0^k| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \le M \cdot \left(\frac{|x_0-\varepsilon|}{|x_0|}\right)^k$. Последняя последовательность образует сходящийся ряд, и равномерная сходимость исходного ряда следует из признака Вейерштрасса.

□

Теорема. (Формула Коши-Адамара). *Обозначим* $\frac{1}{r} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Здесь* $\frac{1}{0} = \infty$ *и* $\frac{1}{\infty} = 0$. *Тогда ряд абсолютно сходится при* $|x| < r$ *и расходится при* $|x| > r$.

Доказательство.

Легко видеть, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \frac{|x|}{r}$. Если $|x| > r$, то найдется подпоследовательность n_k, $|c_{n_k} x^{n_k}| > 1$, и ряд расходится по необходимому условию. Если же $|x| < r$, то для достаточно большого N и некоторого $q < 1$, при всех $n > N$ $\sqrt[n]{|c_n x^n|} < q$, то есть $|c_n x^n| < q^n$. Тогда существует такое $M > 0$, что $|c_n x^n| < M q^n$ для всех n, и последний ряд сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_n x^n|$ сходится по оценочному признаку, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно.

□

Из предыдущих утверждений следует, что ряд сходится равномерно на любом круге радиуса $r_0 < r$. Далее, ряд из его производных снова будет степенным рядом с коэффициентами $c'_k = c_{k+1} \cdot (k+1)$. Поэтому радиус сходимости у него будет такой же. Отсюда и из теорем о почленном дифференцировании и интегрировании равномерно сходяшегося ряда следуют:

Предложение. *S(x) дифференцируема в любой точке круга сходимости* $|x| < r$, *и*

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

Предложение. *S(x) интегрируема на любом отрезке внутри интервала сходимости* $[a, b] \subset (-r, r)$, *и*

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b c_k x^k dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

Разложения элементарных функций:

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

Первые три ряда абсолютно сходятся всюду на R, последний – на $|x| < 1$ (и условно при $x = 1$). Первые три разложения можно обосновать через формулу Тейлора, последнее доказывается через интегрирование ряда для $\frac{1}{x+1}$.

Билет 9.

Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

Лемма. *Если f интегрируема на $[a,b]$, то* $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_a^t f(x)dx$.

Доказательство.

Поскольку функция интегрируема, она ограничена на $[a,b]$, пусть $f(x) < M$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^t f(x)dx\right| = \left|\int\limits_t^b f(x)dx\right| \le M(b-t) \to 0, \quad \text{при } t \to a.$$

□

Определение. *Пусть функция $f(x) : [a,b) \to R$ интегрируема на любом отрезке $[a,t] \subset [a,b)$. Тогда несобственным интегралом функции f по $[a,b)$ называется предел*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t f(x)dx$$

если он существует. В этом случае интеграл называется сходящимся. b может быть как конечным числом, так и ∞.

По лемме, если существует собственный интеграл, несобственный также существует и совпадает с ним.

Аналогично определяется интеграл по промежутку $(a,b]$. Все последующие определения и свойства дословно переносятся на этот симметричный случай.

Лемма. *Следующее равенство справедливо и для несобственных интегралов:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^t f(x)dx + \int\limits_t^b f(x)dx.$$

Эта лемма следует тривиально следует из аналогичных свойств собственных интегралов и предельных переходов.

Теперь можно определить "двусторонний"несобственный интеграл по интервалу (a,b) как сумму односторонних интегралов по $(a,t]$ и $[t,b)$, выбрав произвольное $t \in (a,b)$ (независимость от выбора t следует из последней леммы).

Перейдем к рассмотрению равномерной сходимости несобсственных интегралов. Сначала докажем несколько вспомогательных результатов, связанных с общим понятием равномерной сходимости.

Пусть X и Y – произвольные множества, $D = X \times Y$ и $f(x,y) : D \to R$ – некоторая функция, B – база на X.

Определение. *Функция $f(x,y)$ называется равномерно по $y \in Y$ (на Y) сходящейся к функции $g(y)$ по базе B, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U \in B$ такое, что $\forall x \in U$, $\forall y \in Y$, $|f(x,y) - g(y)| \le \varepsilon$.*

Лемма. (Критерий Коши). *Функция $f(x, y)$ имеет предел при каждом $y \in Y$ и равномерно по y сходится к нему по базе B тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ существует $U \in B$ такое, что $\forall x_1, x_2 \in U$ справедливо $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \varepsilon$.*

Доказательство.

Рассматривая это условие отдельно при каждом y, получаем критерий Коши существования предела, откуда следует существование предела $g(y)$ при каждом y. Теперь в неравенстве $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$ перейдем к пределу по x_2 по базе B, и получим $|f(x_1, y) - g(y)| < \varepsilon$ – определение равномерной сходимости.

□

Теорема. (О перестановке предельных переходов). *Пусть дано множество $D = X \times Y$, базы B_X на X и B_Y на Y, и функция $f(x, y) : D \to R$, причем $f(x, y)$ равномерно на Y сходится к $\varphi(y)$ по базе B_X и $f(x, y)$ сходится к $\psi(x)$ по базе B_Y (равномерность не обязательна). Тогда*

$$\lim_{B_X} \psi(x) = \lim_{B_X} \lim_{B_Y} f(x, y) = \lim_{B_Y} \lim_{B_X} f(x, y) = \lim_{B_Y} \varphi(y)$$

причем все пределы существуют.

Доказательство.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию Коши, существует $U \in B_X$ такое, что $\forall x, x' \in U, \forall y \in Y$, $|f(x, y) - f(x', y)| \leq \varepsilon/3$. Переходя в этом неравенстве к пределу по y по базе B_Y, получаем $|\psi(x) - \psi(x')| \leq \varepsilon/3$, $\forall x, x' \in U$. По критерию Коши существования предела функции по базе, существует $\lim\limits_{B_X} \psi(x) = A$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по x' по базе B_X, получаем $|\psi(x) - A| \leq \varepsilon/3$, $\forall x \in U$. С другой стороны, переходя в неравенстве $|f(x, y) - f(x', y)| \leq \varepsilon/3$ к пределу по x', получаем $|f(x, y) - \varphi(y)| \leq \varepsilon/3$, $\forall x \in U, y \in Y$. Фиксируем некоторое $x \in U$. Поскольку $\lim\limits_{B_Y} f(x, y) = \psi(x)$, существует такое $V \in B_Y$, что $\forall y \in V$, $|f(x, y) - \psi(x)| \leq \varepsilon/3$. Тогда $\forall y \in V$ имеем $|\varphi(y) - A| \leq |\varphi(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - \psi(x)| + |psi(x) - A| \leq 3\varepsilon/3 = \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{B_Y} \varphi(y) = A$, что и требовалось.

□

Пусть множество $X = [a, b)$, $b \in R$ или $b = \infty$. В качестве базы на X рассматриваем базу $t \to b - 0$, ее элементами являются множества (t, b), $t \in [a, b]$. Множество Y по-прежнему произвольно.

Определение. *Предположим, что функция $f(x, y)$ интегрируема по x на любом $[a, t] \subset [a, b)$ при каждом $y \in Y$, и определим $F(t, y) = \int\limits_a^t f(x, y)dx$. Несобственный интеграл (называемый несобственным интегралом, зависящим от параметра)*

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx \tag{1}$$

называется сходящимся равномерно на Y, если функция $F(t, y)$ равномерно на Y сходится к функции $I(y)$ по $t \to b - 0$.

Далее все теоремы будем доказывать для равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Аналогичные теоремы для "обычных"несобственных интегралов можно получить как частный случай (формально рассматривая Y состоящим из одной точки, и тем самым опуская зависимость от y).

Лемма. (Критерий Коши). *Несобственный интеграл (1) сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* t*, что* $\forall t_1, t_2$ *таких, что* $t < t_1 < t_2 < b$ *справедливо* $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство.

Достаточно учесть, что этот интеграл равен $F(t_2, y) - F(t_1, y)$, и применить критерий Коши равномерной сходимости функции F.

$\square$

В частности, если функция $f(x,y)$ ограничена, $|f(x,y)| < M$ и $b < \infty$, имеем $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx < M(t_2 - t_1) < M(b-t) \to 0$ при $t \to b - 0$, и условия признака Коши выполнены, поэтому интеграл равномерно сходится.

Теорема. (Признак Вейерштрасса). *Пусть существует* $g(x) : [a,b) \to R$, $\forall x \in [a,b), y \in Y$, $|f(x,y)| < g(x)$, $g(x)$ *интегрируема на каждом* $[a,t)$, *и несобственный интеграл* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *сходится. Тогда интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* Y.

Доказательство.

Поскольку интеграл от $g(x)$ сходится, по критерию Коши $\forall\varepsilon > 0$, $\exists t \in [a,b)$ такое, что $\forall b > t_2 \geq t_1 > t$, $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon$. Далее, $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} |f(x,y)|dx \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon$. По критерию Коши, интеграл сходится равномерно.

$\square$

Теорема. (Вторая теорема о среднем. Без доказательства). *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *а функция* $g(x)$ *монотонна на* $[a,b]$. *Тогда* $\exists\xi \in [a,b]$,

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx$$

Теорема. (Признак Дирихле). *Пусть функция* $F(t,y)$ *ограничена на* D, *а функция* $g(x,y)$ *определена на* D, *убывает по* $x \in [a,b)$ *при каждом* $y \in Y$ *и стремится к* 0 *при* $x \to b$ *равномерно по* $y \in Y$. *Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ *равномерно сходится на* Y.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое t, выберем некоторые $t < t_1 < t_2 < b$ и используем вторую теорему о среднем

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|g(t_1,y)\int\limits_{t_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(t_2,y)\int\limits_{\xi}^{t_2} f(x,y)dx\right| =$$

для некоторого $\xi \in [t_1, t_2]$

$$= |g(t_1,y)(F(\xi,y) - F(t_1,y)) + g(t_2,y)(F(t_2,y) - F(\xi,y))| \leq$$

пусть $F(t, y) < M$ на D, тогда

$$\leq |g(t_1, y)| \cdot 2M + |g(t_2, y)| \cdot 2M \leq 4M|g(t, y)| \to 0$$

при $t \to b - 0$. По критерию Коши, интеграл сходится равномерно.

$\square$

Теорема. (Признак Абеля). *Пусть несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ *равномерно сходится на* Y*, а функция* $g(x, y)$ *определена и ограничена на* D*, и монотонна по* $x \in [a, b)$ *при каждом* $y \in Y$*. Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x, y)g(x, y)dx$ *равномерно сходится на* Y*.*

Доказательство.

Пусть $g(x, y) < M$ на D. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно, по критерию Коши существует такое t, что $\forall t_1, t_2$ таких, что $t < t_1 < t_2 < b$ справедливо $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x, y)dx\right| < \varepsilon/2M$.

По второй теореме о среднем

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x, y)g(x, y)dx\right| = \left|g(t_1, y)\int\limits_{t_1}^{\xi} f(x, y)dx + g(t_2, y)\int\limits_{\xi}^{t_2} f(x, y)dx\right| \leq$$

для некоторого $\xi \in [t_1, t_2]$

$$\leq M\left|\int\limits_{t_1}^{\xi} f(x, y)dx\right| + M\left|\int\limits_{\xi}^{t_2} f(x, y)dx\right| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

по критерию Коши, интеграл равномерно сходится.

$\square$

Перейдем к свойствам равномерно сходящихся интегралов.

Лемма. (Лемма о предельном переходе в собственном интеграле). *Рассмотрим некоторое* $t \in [a, b]$*. Пусть функция* $f(x, y)$ *интегрируема по* x *при каждом* $y \in Y$*, и равномерно сходится по базе* B *к* $\varphi(x)$ *на* $[a, t]$*. Тогда*

$$\lim_B \int\limits_a^t f(x, y)dx = \int\limits_a^t \lim_B f(x, y)dx = \int\limits_a^t \varphi(x)dx$$

причем выражения справа и слева определены.

Доказательство.

Выберем в качестве X множество всех размеченных разбиений отрезка $[a, b]$, а в качестве B_X – базу $d(T) \to 0$ (см. билет 2). Пусть $g(y, T_\xi) = \sigma(f(x, y), T_\xi)$ – интегральная сумма функции $f(x, y)$ как функции x при фиксированном y, отвечающая разбиению T_ξ. Функция $g(y, T_\xi)$ определена на X и $\lim\limits_{d(T)\to 0} g(y, T_\xi) = \int\limits_a^t f(x, y)dx$.

Выберем $\varepsilon > 0$. Существует $U \in B$ такое, что $\forall x \in [a,b]$, $\forall y \in U$, $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon/(b-a)$. Выберем произвольное размеченное разбиение T_ξ, пусть $y \in U$, тогда

$$|g(y,T_\xi) - \sigma(\varphi(x),T_\xi)| = \left|\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k,y) - \varphi(\xi_k))(t_k - t_{k-1})\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k,y) - \varphi(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Полученное неравенство означает, что $g(y,T)$ равномерно по T сходится к $\sigma(\varphi(x),T)$ по базе B. Применяя теорему о перестановке предельных переходов (с точностью до того, что здесь равномерная сходимость не по B_X, а по B_Y – но теорема, очевидно, верна и в этом случае), получаем

$$\lim_B \lim_{d(T)\to 0} g(y,T) = \lim_{d(T)\to 0}\lim_B g(y,T) = \lim_{d(T)\to 0}\sigma(f(x,y),T) = \int\limits_a^t \varphi(x)dx$$

и последний интеграл существует.

$\square$

Теорема. (О предельном переходе в несобственном интеграле). *Пусть интеграл (1) сходится равномерно, а $f(x,y)$ равномерно сходится по базе B к $\varphi(x)$ на любом отрезке $[a,t] \subset [a,b)$. Тогда*

$$\lim_B I(y) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

причем выражения справа и слева определены.

Доказательство.

Используя лемму, для каждого t получаем равенство $\lim_B F(t,y) = \lim_B \int\limits_a^t f(x,y)dx = \int\limits_a^t \varphi(x)dx$. С другой стороны, $F(t,y)$ равномерно сходится к $I(y)$. Применяя теорему о перестановке предельных переходов, получаем $\lim_B \lim_{t\to b-0} F(t,y) = \lim_{t\to b-0}\lim_B F(t,y) = \lim_{t\to b-0}\int\limits_a^t \varphi(x)dx$, причем левая и првая часть определены. Это и есть искомое равенство.

$\square$

Пусть далее $Y = [c,d]$ – отрезок, соответственно $D = [a,b)\times[c,d]$. Пусть для $t \in [a,b]$, $D_t = [a,t]\times[c,d]$.

Теорема. *(О непрерывности интеграла по параметру). Если функция $g(x,y)$ непрерывна на D (как функция двух переменных) и несобственный интеграл (1) сходится равномерно по $y \in Y$, то функция $I(y)$ непрерывна на Y.*

Доказательство.

Фиксируем точку $y_0 \in Y$ и докажем непрерывность $I(y)$ в точке y_0. Рассмотрим произвольное $t \in [a,b)$, тогда область D_t – компакт, и, по теореме Кантора, функция f равномерно непрерывна на D_1. В частности, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, $\forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $\forall x \in [a,t]$, $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x,y)$ равномерно по $x \in [a,t]$ сходится к $f(x,y_0)$ по базе $B = y \to y_0$. Применяя теорему о предельном переходе в несобственном интеграле,

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_B \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx = I(y_0)$$

$\square$

Теорема. (О дифференцировании интеграла по параметру). *Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ определены и непрерывны на D, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$ сходится равномерно. Тогда функция $I(y)$ дифференцируема на $[c,d]$, и $I'(y) = G(y)$.*

Доказательство.

Рассмотрим произвольное $y_0 \in [c,d]$, и функцию

$$h(x,y) = \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} \tag{2}$$

определенную при $y \neq y_0$. По теореме Лагранжа о промежуточном значении, $h(x,y) = g(x,\xi)$ для некоторого ξ между y_0 и y.

Рассмотрим произвольное $t \in [a,b)$, тогда область D_t – компакт, и, по теореме Кантора, функция g равномерно непрерывна на D_1. В частности, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $\forall x \in [a,t]$, $|g(x,y) - g(x,y_0)| < \varepsilon$. Ясно, что если $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, то и $\xi \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, в силу чего $|h(x,y) - g(x,y_0)| = |g(x,\xi) - g(x,y_0)| < \varepsilon$. Значит, функция $h(x,y)$ равномерно по $x \in [a,t]$ сходится к $g(x,y_0)$ по базе $B = y \to y_0$.

Выберем произвольные $t_1, t_2 \in [a,b]$ и применим лемму о предельном переходе в собственном интеграле:

$$\lim_B \int\limits_{t_1}^{t_2} h(x,y)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,y_0)dx$$

обозначая $A(y) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx$, получаем, интегрируя (2), что в последнем равенстве слева стоит предел от $\frac{A(y)-A(y_0)}{y-y0}$, который по определению является частной производной

$$\frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y_0} = \int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,y_0)dx \tag{3}$$

в частности, получаем, что она существует. Отметим, что равенство (3) справдливо для любых t_1, t_2 и y_0.

Фиксируем опять точку y_0 и выберем $\varepsilon > 0$. Поскольку интеграл $g(x,y)$ сходится равномерно, по критерию Коши существует такое t, что $\forall t_1, t_2$ таких, что $t < t_1 < t_2 < b$ справедливо неравенство $\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,y)dx\right| < \varepsilon$, $\forall y \in Y$. Тогда

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} h(x,y)dx\right| = \left|\frac{A(y) - A(y_0)}{A - A_0}\right| = \left|\frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{\xi}\right| = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} g(x,\xi)dx\right| < \varepsilon$$

здесь использована последовательно теорема Лагранжа о промежуточном значении и формула (3) в точке $y_0 = \xi$. Согласно критерию Коши, последняя оценка означает, что интеграл от $h(x,y)$ сходится равномерно по $y \neq y_0$. Применяя теорему о предельном переходе в несобственном интеграле, получаем

$$\lim_{B} \int\limits_a^b h(x,y)dx = \int\limits_a^b g(x,y_0)dx = G(y_0)$$

с другой стороны, интеграл в левой части равен $\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y0}$. Переходя к пределу по B, получаем в последнем равенстве слева $I'(y_0)$, откуда $I'(y_0) = G(y_0)$, $\forall y_0 \in [c,d]$.

$\square$

Отметим, что, если функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, рассматриваемый как несобственный, будет сходится равномерно – это доказывается аналогично доказательству самой первой леммы (поскольку функция быдет при этом равномерно ограничена на всем прямоугольнике), причем несобственный интеграл будет совпадать с соответствующим собственным интегралом. Поэтому две последние теоремы применимы и к собственным интегралам. В следующей теореме мы будем этим пользоваться.

Теорема. (Об изменении порядка интегрирования). *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на D и интеграл (1) сходится равномерно на D, то функция $I(y)$ интегрируема на $[c,d]$, и*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Доказательство.

Докажем для $t \in [a,b]$ равенство

$$\int_c^d \int_a^t f(x,y)dxdy = \int_a^t \int_c^d f(x,y)dydx \tag{4}$$

Прежде всего, интегралы в обеих частях существуют. В самом деле, функция $f(x,y)$ непрерывна по x, а, значит, интегрируема по отрезку $[a,t]$, а функция $\int\limits_a^t f(x,y)dx = F(t,y)$ будет непрерывна по y (по теореме о непрерывности интеграла). В правой части применяется симметричное рассуждение.

Далее, (4) верно при $a = t$. Вычислим производные левой и правой части. Справа получается $\int_c^d f(x,y)dy$ (производная интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу). Слева стоит интеграл $\int_c^d F(t,y)$, причем функция $F(t,y)$ и ее производная по t, $f(x,y)$, непрерывны на D_t. Значит, можно использовать теорему о дифференцировании интеграла по параметру, и слева тоже получается производная, равная $\int_c^d f(x,y)dy$. Пусть $G(t)$ – разность левой и правой частей, тогда $G(a) = 0$ и $G'(t) = 0, \forall t$. Если для некоторого t_0 получится $G(t_0) \neq 0$, то по теореме Лагранжа $0 \neq (G(t_0) - G(t)) = G'(\xi)(t_0 - t) = 0$ – противоречие. Значит, $G(t) = 0$, и (4) – верное равенство.

Теперь отметим, что функция $F(t,y)$ по условию равномерно сходится к функции $I(y)$. Значит, по лемме о предельном переходе в собственном интеграле

$$\lim_{t \to b-0} \int_c^d F(t,y)dy = \int_c^d I(y)dy$$

и обе части этого равенства определены. При этом, слева стоит предел левой части (4). Раз она имеет предел, имеет предел и правая часть, то есть

$$\int_c^d I(y)dy = \lim_{t\to b-0} \int_a^t \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$\square$

Билет 10.

Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

Рассмотрим функцию $f : [-\pi, \pi] \to R$, пусть $f(-\pi) = f(\pi)$. В этом случае можно доопределить f до 2π-периодической функции на всей R. Далее будем считать, что f так и определена.

Определение. *Коэффициентами Фурье функции f называются числа*

$$a_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx \qquad k = 0, 1, \ldots$$
$$b_k = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Определение. *Рядом Фурье функции f называется ряд*

$$S(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Определение. *Тригонометрическим многочленом называется выражение вида*

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

Обозначим частные суммы ряда Фурье $S_n(x, f)$. Они являются тригонометрическим многочленами с $\alpha_0 = a_0/2$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$.

Рассмотрим k-й член ряда Фурье, $k > 0$, и вычислим:

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \; dt \cos kx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \; dt \sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t - x) \; dt \qquad (1)$$

Фиксируем набор чисел $d = (d_0, \ldots, d_n)$, $d_0 = 1/2$, и рассмотрим тригонометрический многочлен

$$T_d(x, f) = d_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k (a_k \cos kt + b_k \sin k_t) =$$

подставляя (1) и выражение для a_0, получаем

$$= d_0 \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} d_k \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t - x) \; dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(d_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k \cos k(t-x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y) K_d(y) dy =$$

сделана замена $y = t - x$, и выражение в скобках обозначено $K_d(y)$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(x+y) K_d(y) dy + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi-x} f(x+y) K_d(y) dy =$$

в первом интеграле сделаем замену $y \to y + 2\pi$, пользуясь периодичностью подынтегральной функции (функция f периодична по предположению, сделанному в самом начале, а K_d – это сумма константы и косинусов)

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi-x}^{\pi} f(x+y) K_d(y) dy + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi-x} f(x+y) K_d(y) dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+y) K_d(y) dy$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_d(y) dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d_0 \ dy = 2d_0 = 1,$$

поскольку интеграл от $\cos kx$ по $[-\pi, \pi]$ равен 0, а $d_0 = 1/2$.

Рассмотрим произвольное число S, умножим последнее равенство на S и вычтем из полученного перед этим выражения для T_d:

$$T_d(x, f) - S = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+y) - S) K_d(y) dy \tag{2}$$

Рассмотрим частные суммы ряда Фурье $S_n(x, f)$. Они являются частным случаем многочлена T_d с $d = (1/2, 1, \ldots, 1)$. Обозначим соответствующую функцию K_d через D_n и вычислим ее. Для этого вычислим

$$2 \sin \frac{y}{2} D_n(y) = 2 \sin \frac{y}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ky \right) = \sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \cos ky \sin \frac{y}{2} =$$

$$= \sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) y - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) y \right) = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y$$

деля на $2 \sin \frac{y}{2}$, получаем

$$D_n(y) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y}{2 \sin \frac{y}{2}} \tag{3}$$

Определение. *Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если существует интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ в одном из следующих смыслов:*

1) *как собственный интеграл (для этого достаточно, чтобы функция $f(x)$ была собственно интегрируема на $[a, b]$);*

2) *как несобственный интеграл;*

3) *отрезок $[a, b]$ представляется как конечное объединение непересекающихся отрезков, на каждом из которых функция абсолютно интегрируема в смысле предыдущих двух вариантов.*

Замечание. *(Без доказательства). Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$, а функция $g(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ абсолютно интегрируемо на $[a, b]$.*

Лемма. (Лемма Римана). *Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\ dx = 0$$

(интеграл определен, поскольку функция $\cos nx$ непрерывна на $[a, b]$).

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай собственного интеграла (первый случай предыдущего определения).

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. По определению интеграла как предела интегральных сумм, существует такое $d > 0$, что для любого размеченного разбиения T_ξ такого, что $d(T_\xi) < d$ будет выполнено $|\int_a^b f(x) - \sigma(f, T_\xi)| < \varepsilon/2$. Фиксируем неразмеченное разбиение $T = (t_0, \ldots, t_n)$, $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ с условием $d(T) < d$. Пусть $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $m_k = \inf_{\Delta_k} f(x)$, и пусть

$$S = \sum_{k=1}^n m_k(t_{k+1} - t_k)$$

легко проверить, что $S = \inf\sigma(f, T_\xi)$, где инфинум берется по всем размеченным разбиеням, соответствующим T (следует перейти к инфинуму отдельно на каждом отрезке разбиения). В силу этого, будет верно неравенство $|\int_a^b f(x) - S| \le \varepsilon/2$.

Теперь вычислим

$$\left|\int_a^b f(x)\cos nx\ dx\right| = \left|\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\cos nx\ dx\right| \le$$

добавим и вычтем из $f(x)$ под k-м интегралом m_k, и внесем модуль под сумму

$$\le \sum_{k=1}^n\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(f(x) - m_k)\cos nx\ dx\right| + \sum_{k=1}^n\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} m_k\cos nx\ dx\right| \le$$

в первом интеграле внесем модуль под интеграл и оценим косинус единицей; второй интеграл вычисляется явно

$$\le \sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}|f(x) - m_k|\ dx + \sum_{k=1}^n\left|\frac{m_k}{n}\sin nx\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}\right| \le$$

в первом интеграле можно снять модуль, поскольку $f(x) \ge m_k$ на $[t_{k-1}, t_k]$. После этого его можно рассмотреть как разность интегралов; во втором интеграле модуль разности синусов оценивается двойкой

$$\le \sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\ dx - \sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k} m_k\ dx + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 2|m_k| =$$

в последнем слагаемом сумма не зависит от n, поэтому для достаточно больших n последнее слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Первые два члена упрощаются

$$\leq \int_a^b f(x)\ dx - \sum_{k=1}^{n} m_k(t_{k+1}-t_k) + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f(x)\ dx - S + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

откуда и следует необходимое утверждение для собственных интегралов.

Пусть теперь интеграл несобственный. Для определенности, будем рассматривать случай левостороннего интеграла (то есть, функция интегрируема на каждом отрезке $[c,a]$). Тогда

$$\int_a^b f(x)\cos nx\ dx = \int_a^c f(x)\cos nx\ dx + \int_c^b f(x)\cos nx\ dx = I_1 + I_2$$

далее,

$$|I_1| \leq \int_a^c |f(x)||\cos nx|dx \leq \int_a^c |f(x)|dx$$

поскольку функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, этот интеграл можно сделать сколь угодно малым выбором c. Далее, для данного c интеграл I_2 собственный, и его можно сделать сколь угодно малым выбором n по первому случаю.

Наконец, третий случай тривиально следует из второго (поскольку интеграл по объединению отрезков равен сумме интегралов по ним).

□

Теорема. (Признак Дини). *Пусть функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и $f(-\pi)=f(\pi)$. Фиксируем $x \in [-\pi,\pi]$ и $S \in R$. Пусть $\varphi(t) = \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t)) - S$. Если для некоторого $h>0$ функция $\varphi(t)/t$ абсолютно интегрируема на $[0,h]$, то $S(x,f)=S$.*

Доказательство.

Используя равенство (2), получим

$$S_n(x,f) - S = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+y)-S)D_n(y)dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{0}(f(x+y)-S)D_n(y)dy + \int\limits_{0}^{\pi}(f(x+y)-S)D_n(y)dy =$$

Теперь в первом интеграле сделаем замену $y \to -y$

$$= \int\limits_{0}^{\pi}(f(x-y)-S)D_n(-y)dy + \int\limits_{0}^{\pi}(f(x+y)-S)D_n(y)dy =$$

используем $D_n(-y) = D_n(y)$ и сложим интегралы

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+y)+f(x-y)-2S)D_n(y)dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}2\varphi(y)D_n(y)dy =$$

подставим выражение (3), а также умножим и разделим на y

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(y)}{y}\frac{\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y\ dy = I_n$$

Функция $\varphi(y)$ абсолютно интегрируема на $[h,\pi]$ (поскольку функцию f можно считать абсолютно интегрируемой на любом отрезке в R после того, как мы доопределили ее на R по периодичности). Функция $\frac{1}{y}$ непрерывна на $[h,\pi]$, в силу чего функция $\frac{\varphi(y)}{y}$ абсолютно интегрируема на $[h,\pi]$. Поскольку она абсолютно интегрируема на $[0,h]$ по условию, ее можно считать абсолютно интегрируемой на $[0,\pi]$. Далее, функцию $\frac{\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}$ можно считать непрерывной на $[0,\pi]$ (доопределив ее в 0 ее пределом, равным 1), можно считать функцию $\frac{\varphi(y)}{y}\frac{\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}$ абсолютно интегрируемой на $[0,\pi]$. Тогда интеграл I_n стремиться к 0 при $n\to\infty$ по лемме Римана. Иначе говоря, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x,f) - S = 0$ откуда и следует искомое утверждение.

□

Определение. *Пусть функция $f(x)$ непрерына на отрезке $[a,b]$. Тогда ее модулем непрерыности называется функция*

$$\omega_f(t) = \sup_{|x_1-x_2|\le t} |f(x_1) - f(x_2)|$$

Легко видеть, что модуль непрерывности неубывает по t. Кроме того, из неравенства треугольника следует, что $\omega_f(t_1+t_2) \le \omega_f(t_1) + \omega_f(t_2)$. Отсюда по индукции следует, что $\omega_f(nt) \le n\omega_f(t)$, и следующее неравенство, верное для любого m ($[\,]$ обозначает целую часть):

$$\omega_f(t) \le \omega_f\left(\frac{tm}{m}\right) \le \omega_f\left(([tm]+1)\frac{1}{m}\right) \le$$

$$\le ([tm]+1)\omega_f\left(\frac{1}{m}\right) \le (tm+1)\omega_f\left(\frac{1}{m}\right) \tag{4}$$

Следствие. *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и для некоторого $h>0$ функция $\omega_f(t)/t$ абсолютно интегрируема на $[0,h]$. Тогда $\forall x\in[-\pi,\pi]$, $S(x,f) = f(x)$.*

Для доказательства достаточно отметить, что для $S = f(x)$ получим $|f(x\pm t) - S| \le \omega_f(t)$, а отсюда $|\varphi(t)| \le \omega_f(t)$.

Этому условию удовлетворяют все функции из любого класса Гельдера (определяемого условием $\omega_f(t) \le Ct^p$, для некоторых $C,p>0$; сюда входят функции класса Липшица – им соответствует $p=1$), поскольку интеграл $\int_0^h t^{p-1}dt$ сходится при $p>0$.

Одного требования непрерывности функции, однако, недостаточно. Иначе говоря, существует непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция f, ряд Фурье которой к ней не сходится. Но, тем не менее, верна слудеющая

Теорема. (о полноте тригонометрического базиса). *Пусть функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда существует последовательность тригонометрических многочленов, равномерно сходящаяся к f на $[-\pi,\pi]$.*

Доказательство.

Рассмотрим следующую функцию

$$u_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right|^2 = \frac{1}{2(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)\overline{\left(\sum_{l=0}^{n} e^{ilx}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k,l=0}^{n} e^{ikx}e^{-ilx} = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{r=-n}^{n}\sum_{k+l=r} e^{irx} = \sum_{r=-n}^{n}\frac{n+1-|r|}{2(n+1)}e^{irx} =$$

отделим слагаемое с $s=0$ и соберем в пары слагаемые с s и $-s$:

$$= \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n+1-r}{2(n+1)}\left(e^{irx}+e^{-irx}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n+1-r}{n+1}\cos rx$$

Рассмотрим набор d из чисел $d_0 = 1/2$, $d_k = \frac{n+1-r}{n+1}$ при $k > 0$. Тогда $D_d(x) = u_n(x)$. Покажем, что соответствующие многочлены $T_d(x,f)$ (они называются многочленами Фейера) равномерно сходятся к f на $[-\pi,\pi]$.

Запишем модуль выражения (2) для $S = f(x)$ и будем его оценивать

$$|T_n(x,f) - f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+y)-f(x))u_n(y)dy\right| \le$$

$u_n(y)$ определяется как квадрата модуля некторого выражения, а потому положительно. Внося с учетом этого модуль под интеграл, получим

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+y)-f(x)|u_n(y)dy \le$$

Выражение под модулем оценивается модулем непрерывности $\omega_f(y)$, и далее используем (4)

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_f(y)u_n(y)dy \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_f(1/m)(m|y|+1)u_n(y)dy =$$

$$= \omega_f(1/m)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_n(y)dy + m\omega_f(1/m)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|y|u_n(y)dy$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Интеграл в первом слагаемом равен единице (как уже говорилось). Поскольку функция f непрерывна, $\omega(1/m)$ стремится к 0 при $m \to \infty$, и можно выбрать такое m, что первое слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Фиксируем подходящее m и покажем, что можно выбрать такое n, что и второе слагаемое будет меньше $\varepsilon/2$. Достаточно оценить последний интеграл (отметим, что оценка не зависит от x, что и означает равномерность сходимости $T_d(x,f)$ к $f(x)$).

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|y|u_n(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{\pi}\left|\frac{y}{2}\right|dy \le$$

используем неравенство $\frac{2}{\pi}z < \sin z$ для $z \in [0,\frac{\pi}{2}]$ (функция sin выпукла вверх, а потому лежит выше своей хорды) для $z = |y/2|$, получая

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{y}{2}u_n(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{y}{2}\sqrt{u_n(y)}\right)\left(\sqrt{u_n(y)}\right)dy \le$$

применим неравенство Коши-Буняковского ($\int fg \le \sqrt{\int f^2 \int g^2}$):

$$\le \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{y}{2} u_n(y) dy \int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n(y) dy} = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos y}{2} u_n(y) dy \cdot \pi} =$$

второй интеграл под корнем равен π – его уже вычисляли. Оценим первый интеграл (опустив коэффициент $1/2$).

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1-\cos y) u_n(y) dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u_n(y) dy - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} d_k \cos ky \right) dy =$$

первый интеграл равен π

$$= \pi - \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y \; dy - \sum_{k=1}^{n} d_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos y \cos ky \; dy =$$

второй член равен 0 (интеграл косинуса по периоду). Далее, $\cos y \cos ky = \frac{1}{2}(\cos(k+1)y + \cos(k-1)y)$, и интеграл от этого выражения по $[-\pi, \pi]$ тоже равен 0, кроме $k = 1$, когда $\cos(k-1)y = \cos 0y = 1$. Остается

$$= \pi - d_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dy = \pi - d_1 \pi = \pi \left(1 - \frac{n+1-1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{n+1}$$

это выражение стремится к 0 при $n \to \infty$, что и обспечивает нужную оценку.

$\square$

Билет 11.

Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция Вихрь

Определение. *Первой дифференциальной формой, определенной на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^3$, называется семейство линейных однородных функций в $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра $u = (x, y, z)$, пробегающего все множество D:*

$$\mathcal{L}(x, y, z)(h, l, k) = P(x, y, z)h + Q(x, y, z)l + R(x, y, z)k, \tag{1}$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — некоторые функции, определенные на D.

Заметим, что:
1) если $F(x, y, z)$ дифференцируема в D, то ее дифференциал $dF(x, y, z)(h, l, k) = F'_x(x, y, z)h + F'_y(x, y, z)l + F'_z(x, y, z)k$;
2) если $F(x, y, z) = x$, то $dF(x, y, z)(h, l, k) = dx(x, y, z)(h, l, k) = h$; если $F(x, y, z) = y$, то $dF(x, y, z)(h, l, k) = dy(x, y, z)(h, l, k) = l$; если $F(x, y, z) = z$, то $dF(x, y, z)(h, l, k) = dz(x, y, z)(h, l, k) = k$.
Подставляя эти выражения для h, l, k в (1), имеем

$$\mathcal{L}(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \tag{2}$$

Определение. *Путем называется непрерывное отображение $\gamma: [0, 1] \to D$.*

Определение. *Путь $\gamma: [0, 1] \to D$ называется гладким, если функция $\gamma(t)$ — непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$ (на концах существуют односторонние производные) и $\gamma'(t) \neq 0,\ t \in [0, 1]$.*

Пусть заданы $\mathcal{L}(x, y, z)$ на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^3$ и путь L в D с параметризацией $f : [a, b] \to D \subset \mathbb{R}^3$, $f = (f^1, f^2, f^3)$. Рассмотрим $\mathcal{P}$ — множество всех размеченных разбиений $[a, b]$ и базу $d(T) \to 0$ на $\mathcal{P}$. Пусть $T_\tau \in \mathcal{P}: a = t_0 < \dots < t_n = b$ и $\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$.
Составим (3):

$$\sigma_f(\mathcal{L}; T_\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k\right],$$

в которой $\xi_k = f^1(\tau_k)$, $\eta_k = f^2(\tau_k)$, $\zeta_k = f^3(\tau_k)$, $\Delta x_k = f^1(t_k) - f^1(t_{k-1})$, $\Delta y_k = f^2(t_k) - f^2(t_{k-1})$, $\Delta z_k = f^3(t_k) - f^3(t_{k-1})$.

Определение. *Если $\exists \lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma_f(\mathcal{L}; T_\tau) = I$, то число I называют интегралом дифференциальной формы (2) по пути L.*

Обозначение: (4) $I = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ — криволинейный интеграл второго рода (причем этот интеграл не зависит от выбора параметризации пути L).

Теорема. (выражение криволинейнго интеграла через определенный) *Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны на множестве точек пути L с некоторой непрерывно дифференцируемой параметризацией $f\colon [a, b] \to D$ с компонентами $f = (f_1, f_2, f_3)$, то дифференциальная форма*

$L = Pdx + Qdy + Rdz$ интегрируема по L, и справедливо

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int\limits_a^b \left[P\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)f_1'(t) + Q\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)f_2'(t) + R\Big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\Big)f_3'(t)\right] dt.$$

Замечание. *Такой путь L называется гладким в D.*

Определение. *D — гладкая невырожденная (без особых точек) поверхность в $\mathbb{R}^3$, если она является образом плоского выпуклого множества D при отображении $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, причем его координаты — дважды непрерывно дифференцируемые функции.*

Определение. *Будем говорить, что параметризация $\vec{r}$ поверхности D отвечает ориентации ее границы*
$L = \partial D$ (или "согласована"с ориентацией ее границы), если при этой параметризации $\vec{r}$ ориентация кривой L порождается положительной ориентацией ее прообраза Λ (границы множества D_0 — прообраза поверхности D).

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана правая система декартовых координат с ортами $\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)$. Рассмотрим гладкую поверхность Φ с $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ и ее положительную ориентацию, задаваемую вектором нормали $\nu = \vec{r_u} \times \vec{r_v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$ и $\vec{n} = \dfrac{\vec{\nu}}{|\vec{\nu}|}$, и обозначим углы $\alpha = \widehat{\vec{n}\vec{e_1}}$, $\beta = \widehat{\vec{n}\vec{e_2}}$, $\gamma = \widehat{\vec{n}\vec{e_3}}$. Тогда $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Пусть на Φ задана непрерывная векторная функция $\vec{a} = (P, Q, R)$, где

$$P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad Q = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad R = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Определение. *Поверхностным интегралом $\iint\limits_{\Phi^+} \vec{a}ds$ второго рода по ориентированной гладкой поверхности Φ^+ от векторной функции $\vec{a}$ называют интеграл $\iint\limits_{\Phi} \vec{a} \cdot \vec{n}ds$.*

Покоординатная запись $\iint\limits_{\Phi^+} \vec{a}ds$ имеет вид $\iint\limits_{\Phi^+} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy)$.

Определение. *Поверхностным интегралом по кусочно - гладким областям называют $\iint\limits_{\Phi^+} \vec{a}ds = \sum\limits_{i=1}^{m} \iint\limits_{\Phi_i^+} \vec{a}ds$, где $\Phi = \{\Phi_i\}_{i=1}^m$, Φ_i — гладкие.*

Определение. *Пусть V — кубируемый компакт в R^3_{Oxyz}. Представление $V = \bigcup\limits_{k=1}^{n} v_k$, v_k — кубируемые компакты, $]v_k[\cap]v_j[= \emptyset$, $k \neq j$, называется разбиением T компакта V. Δv_k = объем v_k, $k = \overline{1, n}$, $d(T) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} (\operatorname{diam} v_k)$ — диаметр разбиения T, v_k — ячейка разбиения T.*

Выбирая произвольно $\omega_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i$, $i\overline{1, n}$, получаем набор $w = \{\omega_i\}$ и размеченное разбиение T_ω. Множества $B_\delta = \{T_\omega, d(T_\omega) < \delta\}$, $\delta > 0$, образуют базу B_δ на множестве $\mathcal{P}$ всех размеченных разбиений. Обозначим ее $d(T) \to 0$.

Определение. *Пусть функция $f(x,y,z)$ определена на кубируемом компакте V, и T_ω — произвольное размеченное разбиение V. Число* (5) $\sigma(f;T_\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$ *называется интегральной суммой функции f относительно размеченного разбиения T_ω.*

Рассмотрим отображение $\Phi_f : \mathcal{P} \to R$, $\Phi_f(T_\omega) = \sigma(f;T_\omega)$.

Определение. *Число $l = \lim\limits_{d(T)\to 0} \Phi_f$ (если предел существует) называется тройным интегралом функции $f(x,y,z)$ по кубируемому компакту V и обозначается $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma(f;T_\omega)$* (6). *В этом случае функция f называется интегрируемой по Риману на V.*

Теорема. (формула Грина) *Пусть D — выпуклая область, граница $L = \partial D$ которой является замкнутой невырожденной кусочно - гладкой кривой. Пусть также функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны на D и имеют там же непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула*

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

где кривая L обходится в положительном направлении.

Доказательство.

Мы докажем только равенство $\oint\limits_L Pdx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$. Равенство же $\oint\limits_L Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$ доказывается аналогично.

Пусть $[a,b]$ является проекцией области D на ось Ox. Через точки $(a,0)$ и $(b,0)$ проведем вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$. В силу выпуклости множества D его граница $L = \partial D$ разбивается на четыре участка: L_1 и L_3 — отрезки, лежащие на прямых $x = a$ и $x = b$ (каждый из них может состоять из одной точки), и L_2 и L_4 — кривые, лежащие в полосе между ними.

На L_1 и L_3 величина x постоянна, поэтому $\int\limits_{L_1} Pdx \int\limits_{L_3} Pdx = 0$.

Всякая прямая $x = x_0$ при $x_0 \in (a,b)$ пересекает каждую кривую L_2 и L_4 строго в одной точке (в силу выпуклости D). Обозначим их $\varphi_1(x_0)$ и $\varphi_2(x_0)$ соответственно, то есть L_2 — график функции $y\varphi_1(x)$, а L_4 — график функции $y = \varphi_2(x)$.

Заметим, что из кусочной гладкости кривой L следует кусочная гладкость функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Из теоремы о выражении криволинейного интеграла через интеграл Римана $\int\limits_{L_2} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$ и $\int\limits_{L_4} P(x,y)dx = -\int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$. Отсюда $\int\limits_{L_2\cup L_4} P(x,y)dx = \int\limits_a^b (P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x)))\, dx = H$. Так как функция $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна на D, то по теореме Ньютона - Лейбница $P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x)) = -\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$. Следовательно, $H = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy - \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$. В силу того, что $\int\limits_{L_1} Pdx = \int\limits_{L_3} Pdx = 0$, справедлива формула $H = \oint\limits_L Pdx$. Тем самым теорема доказана.

□

Теорема. (формула Стокса) *Пусть D — гладкая невырожденная (без особых точек) поверхность в R^3, которая является образом плоского выпуклого множества D_0 при отображении $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, причем его координаты являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Пусть кривая L — кусочно - гладкая граница поверхности D, являющаяся образом кусочно - гладкой границы Λ множества D_0. Ориентация границы отвечает параметризации $\vec{r}$. Пусть также P, Q, R — гладкие функции на D. Тогда справедлива формула:*

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_D (dP)\wedge dx + (dQ)\wedge dy + (dR)\wedge dz$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy.$$

Доказательство.

В силу линейности поверхностного интеграла достаточно рассмотреть случай интеграла $K = \oint\limits_L Pdx$, то есть достаточно доказать формулу

$$K = \oint\limits_L Pdx = \iint\limits_D (dP)\wedge dx = \iint\limits_D P'_z dz\wedge dx - P'_y dx\wedge dy = S.$$

Пусть $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ — параметризация поверхности D, причем $(u,v)\in D_0$. Кроме того, на границе Λ области D_0 задана кусочно - гладкая параметризация $(u,v) = (u(t), v(t))$, $t\in I = [0,1]$, $(u(0), v(0)) = (u(1), v(1))$, которая определяет на кривой L параметризацию $\vec{r}(u(t), v(t))$. В силу теоремы о выражении криволинейного интеграла через определенный интеграл имеем:

$$K = \oint\limits_L Pdx = \int\limits_0^1 P(\vec{r}(u(t), v(t)))dx(u(t), v(t)).$$

По той же теореме последний интеграл равен

$$K = \oint\limits_\Lambda P(\vec{r}(u,v))dx(u,v) = \oint\limits_\Lambda P(\vec{r}(u,v))(x'_u du + x'_v dv).$$

К интегралу K применим формулу Грина. Тогда

$$K = \oint\limits_\Lambda P(\vec{r}(u,v))dx(u,v) = \iint\limits_{D_0} (dP(\vec{r}(u,v)))\wedge dx(u,v).$$

Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала и непрерывностью вторых частных производных функций $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. Имеем

$$dP(\vec{r}(u,v)) = P'_x dx(u,v) + P'_y dy(u,v) + P'_z dz(u,v).$$

Следовательно,

$$K = \iint\limits_{D_0} P'_z dz(u,v)\wedge dx(u,v) - P'_y dx(u,v)\wedge dy(u,v) = S_1.$$

Здесь S_1 рассматривается как поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне плоской области D_0. Но при параметризации $\vec{r}\vec{r}(u,v)$ оба интеграла S и S_1 дают одно и то же выражение. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть скобки в выражениях $dz(u,v)\wedge dx(u,v)$ и $dx(u,v)\wedge dy(u,v)$, считая, что $dx(u,v)x'_u du + x'_v dv$ и т.д.
Окончательно имеем, что S и S_1 сводятся к одному и тому же двойному интегралу

$$S = S_1 = \iint\limits_{D_0} (P'_z B - P'_y C)dudv,$$

где $B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$. Тем самым доказано $K = S$, ч.т.д.

$\square$

Теорема. (формула Гаусса - Остроградского) *Пусть*

1) множество $V \in \mathbb{R}^3$ — выпуклый кубируемый компакт;

2) $\partial V = S$ — невырожденная (без особых точек) кусочно - гладкая поверхность;

3) на V заданы гладкие функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $RR(x, y, z)$.

Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{S^+} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint\limits_{V} (P'_x + Q'_y + R'_z) dxdydz.$$

Интеграл в левой части равенства является интегралом второго рода, который берется по внешней стороне поверхности S^+, а в правой части — обычный тройной интеграл по V.

Доказательство.

Рассмотрим только случай $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$ (аналогично доказательству формулы Грина). Спроектируем поверхность S на плоскость xOy и обозначим эту проекцию через D. В силу выпуклости V всякая прямая, параллельная оси Oz и пересекающая D, пересекает V по отрезку. Пусть $(x, y) \in D$, тогда нижний конец этого отрезка имеет координаты $(x, y, \varphi_1(x, y))$, а верхний конец отрезка — координаты $(x, y, \varphi_2(x, y))$. Пусть далее $\Lambda = \partial D$ — граница множества D. Тогда поверхность D разбивается на три кусочно - гладкие части: $S_1 = \{(x, y, z) | (x, y \in D, z = \varphi_1(x, y))\}$, $S_2 = \{(x, y, z) | (x, y \in D, z = \varphi_2(x, y))\}$, $S_3 = \{(x, y, z) | (x, y \in \Lambda, (x, y, z \notin S_1 \cup S_2)\}$.

Здесь для поверхности S_1 интегрирование ведется по ее нижней стороне, а для S_2 — по верхней стороне, и, наконец, для S_3, представляющей боковую часть поверхности S, — по стороне, нормаль к которой перпендикулярна оси Oz и является внешней нормалью по отношению к D. По теореме о сведению нового интеграла к двойному интегралу Римана имеем:

$$\iint\limits_{S_3} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_3} R \cos(\vec{n}, \vec{e_3}) ds = 0,$$

поскольку $\cos(\vec{n}, \vec{e_3}) = 0$. Далее,

$$\iint\limits_{S_1} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_1} R \cos(\vec{n}, \vec{e_3}) ds - \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dxdy,$$

$$\iint\limits_{S_2} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_2} R \cos(\vec{n}, \vec{e_3}) ds - \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dxdy.$$

По формуле Ньютона - Лейбница при фиксированных (x, y) получим

$$R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y)) = \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S} R dxdy = \iint\limits_{S_2} R dxdy - \iint\limits_{S_1} R dxdy = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \equiv \iiint\limits_{V} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dxdydz.$$

□

Определение. *Скалярная функция $h(\vec{u}) : V \to \mathbb{R}^3$, где V — выпуклая область, называется скалярным полем, а отображение $\vec{\varphi}(\vec{u})$ области V в R^3 называется векторным полем на области V.*

Если $h(\vec{u})$ и $\vec{\varphi}(\vec{u})$ — гладкие, то соответствующие поля тоже называются гладкими.

Далее считаем, что $h(\vec{u})$ и $\vec{\varphi}(\vec{u})$ — гладкие функции.

Определение. *Векторное поле* $A(\vec{u}) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} h(\vec{u})$ *называется градиентом скалярного поля* $h(\vec{u})$.

Определение. *Производной по направлению* l *скалярного поля* $h(\vec{u})$ *в точке* $\vec{u_0}$ *называется величина* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{h(\vec{u_0}+t\vec{l}) - h(\vec{u_0})}{t} = \dfrac{\partial h}{\partial l}$, *где* $\vec{l}$ *— вектор, определяющий направление* l.

Известно, что $\frac{\partial h}{\partial l} = (\operatorname{grad} h(\vec{u}), \vec{l})$.

Определение. *Пусть* $\vec{\varphi}(\vec{r}) = (P, Q, R)$ *— гладкое векторное поле.* $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{\varphi}$ *— дивергенция векторного поля, а вектор* $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \vec{\varphi}$ *— ротор векторного поля* $\vec{\varphi}$.

Если ввести оператор "∇", полагая $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, то предыдущие определения можно формально записать в виде $\operatorname{div} \vec{\varphi} = (\nabla, \vec{\varphi})$, $\operatorname{rot} \vec{\varphi} = [\nabla, \vec{\varphi}]$, $\operatorname{grad} h = \nabla h$.

Определение. *Криволинейный интеграл* I_0 *второго рода* $I_0 = \oint\limits_L P dx + Q dy + R dz$ *по кусочно - гладкой ориентированной замкнутой кривой* L *называется циркуляцией вектора* $\vec{\varphi} = (P, Q, R)$ *по замкнутому контуру* L.

Если $\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор в положительном направлении обхода контура L, то интеграл I_0 можно записать в виде $I_0 = \oint\limits_L (\vec{\varphi}, \vec{\tau}) dl$, dl — элемент длины дуги кривой L.

Определение. *Поверхностный интеграл второго рода по ориентированной гладкой поверхности* S *вида*

$$I = \iint\limits_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

называется потоком вектора $\vec{\varphi} = (P, Q, R)$ *через поверхность* S.

Обозначим через $\vec{n}$ нормаль к поверхности S, соответствующую ее ориентации, тогда поток I через поверхность S можно записать в виде $I = \iint\limits_S (\vec{\varphi}, \vec{n}) ds$. Пусть сторона поверхности S, отвечающая вектору нормали $\vec{n}$, согласована с направлением обхода контура, отвечающим вектору $\vec{\tau}$ (единичному касательному вектору к кривой L).

Можно переформулировать в векторном виде теоремы Стокса и Гаусса - Остроградского.

Теорема. (теорема Стокса) *Циркуляция вектора* $\vec{\varphi}$ *по кусочно - гладкой границе* L *кусочно - гладкой поверхности* S *равна потоку* $\operatorname{rot} \vec{\varphi}$ *через эту поверхность:*

$$\oint\limits_L (\vec{\varphi}, \vec{\tau}) dl = \iint\limits_S (\operatorname{rot} \vec{\varphi}, \vec{n}) ds.$$

Теорема. (теорема Гаусса - Остроградского) *Поток вектора* $\vec{\varphi}$ *через кусочно - гладкую границу* S *выпуклой трехмерной области* V *равен тройному интегралу от дивергенции вектора* $\vec{\varphi}$ *по множеству* V, *то есть*

$$\iint\limits_S (\vec{\varphi}, \vec{n}) ds = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{\varphi} dv,$$

где $\vec{n}$ *— внешняя нормаль к поверхности* S.

Билет 12.

Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли.

Определение. *Множество M называется линейным пространством над полем F, если на M определены две операции $+ : M \times M \to M$ и $\cdot : F \times M \to M$, удовлетворяющие следующим восьми аксиомам:*

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in M$.

2) $\exists e \in M$, $a + e = e + a = a$ $\forall a \in M$. *e называется нулем и обозначается* 0.

3) $\forall a \in M$, $\exists b \in M$, $a + b = b + a = 0$. *b обозначается* $-a$.

4) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in M$.

5) $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall a \in M$, $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\mu\lambda)a$.

6) $1 \cdot a = a$ $\forall a \in M$.

7) $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall a \in M$, $(\lambda + \mu)a = (\lambda a) + (\mu a)$.

8) $\forall \lambda \in F$, $\forall a, b \in M$, $\lambda(a + b) = (\lambda a) + (\lambda b)$.

Определение. *Линейным подпространством пространства M называется подмножество $N \subset M$, замкнутое относительно операций $+$ и $\cdot$.*

Определение. *Линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n \in M$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ называется*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \tag{1}$$

Определение. *Система векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется линейно независимой, если из равенства нулю их линейной комбинации (1) следует равенство нулю всех коэффициентов $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.*

Лемма. *Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима, a – еще один вектор. Он представим как линейная комбинация $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда система векторов $a_1, \ldots, a_n, a$ линейно зависима.*

Доказательство.

Если $a = \sum_{k=i}^{1} nc_i a_i$, то $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n + (-1)a = 0$ – нетривиальная линейная комбинация.

Обратно, пусть $c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n + ca = 0$ – нетривиальная линейная комбинация. Если $c = 0$, то $\sum_{k=i}^{1} nc_i a_i = 0$, что противоречит их линейной независимости. Если же $c \neq 0$, то $a = \sum_{k=i}^{1} n \frac{-c_i}{c} a_i$.

$\square$

Определение. *Линейно независимая система векторов $a_1, \dots, a_n$ называется базисом, если любой элемент $a \in F$ представляется в виде линейной комбинации (1) с некоторыми коэффициентами.*

Лемма. *Если линейное пространство M имеет базис, то в любом его базисе одинаковое количество векторов.*

Доказательство.

Рассмотрим два базиса $e_1, \dots, e_n$, и $f_1, \dots, f_m$. Достаточно привести к противоречию предположение $m > n$.

Пусть $m > n$. Каждый вектор f_i представляется в виде линейной комбинации векторов e_j, поскольку последние образуют базис. Итак,

$$f_i = \sum_{k=j}^{1} n a_i^j e_j$$

Их линейная комбинация будет иметь вид

$$\sum_{k=i}^{1} m \lambda^i f_i = \sum_{k=i}^{1} m \lambda^i \sum_{k=j}^{1} n a_i^j e_j = \sum_{k=j}^{1} n \left(\sum_{k=i}^{1} m \lambda^i a_i^j \right) e_j$$

Покажем, что существуют такие отличные от нуля коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $\forall j = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=i}^{1} m \lambda^i a_i^j \tag{2}$$

тогда f_i окажутся линейно зависимы, и получится противоречие.

Замечание: окончание доказательства опирается на некоторые факты, изложенные ниже.

Далее, (2) представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы $A = ||a_i^j||$. Ранг этой матрицы при подсчете через строки не может превышать числа строк, иначе говоря, $rkA \leq n < m$. Поэтому, система из m столбцов не может быть линейно независимой (при подсчете ранга через столбцы), в силу чего коэффициенты, обращающие (2) в 0, существуют.

□

Определение. *Размерностью линейного пространства M называется количество векторов в его базисе (корректно по предыдущей лемме, если хотя бы один базис существует).*

Определение. *Рангом системы векторов называется число векторов в макисмальной линейно независимой подсистеме.*

Определение. *Арифметическим пространством F^n называется линейное пространство строк $(a^1, \dots, a^n)$, $a_i \in F$, с покомпонентными операциями сложения и умножения на элементы F.*

В свете этого определения, строки матрицы $m \times n$ можно рассматривать как элементы пространства F^m.

Определение. *Рангом матрицы A называется ранг ее системы строк. Обозначается $\operatorname{rk} A$.*

Выберем в данной матрице некоторые k строк и k столбцов. На их пересечении образуется "подматрица"размерности $k \times k$, определитель которой называется минором порядка k. Очевидно, числом k он определен неоднозначно.

Напомним, что определитель сохраняется при транспонировании матрицы. Кроме того, равенство или неравенство определителя 0 сохраняется при элементарных преобразованиях (прибавление к одной строке другой с коэффициентом, перестановка строк, умножение строки на число).

Лемма. *Ранг матрицы A равен порядку ее наибольшего отличного от 0 минора.*

Доказательство.

Пусть $r_1 = \operatorname{rk} A$, r_2 есть порядок наибольшего отличного от 0 минора.

Во-первых, рассмторим минор порядка $r > r_1$. Тогда образующие его строки в исходной матрице являлись линейно зависимыми (по определению ранга). Значит, их подстроки, вошедшие в минор, также будут линейно зависимыми (с теми же коэффициентами). Если строки минора линейно зависимы, то элементарными преобразованиями можно сделать нулевую строку, откуда минор равен 0. Итак, любой минор порядка $r > r_1$ равен 0, поэтому $r_2 \leq r_1$.

Теперь выберем в матрице систему из r_1 линейно независимых строк. Приведем ее методом Гаусса к ступенчатому виду, при этом равенство или неравенство нулю любых построенных из нее миноров сохранится. Кроме этого, любая строка новой матрицы есть нетривиальная линейная комбинация строк исходной системы, поэтому нулевых строк нет. Выбрав столбцы, содержащие первые элементы "ступенек", получим отличный от нуля минор порядка r_1. Итак, $r_2 \geq r_1$, откуда $r_2 = r_1$.

$\square$

Теорема. (О ранге матрицы). *Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов и равен порядку ее наибольшего отличного от 0 минора.*

Доказательство.

Обозначим ранг системы строк матрицы A через r_1, ранг системы столбцов r_2, порядок наибольшего отличного от 0 минора через r_3, порядок наибольшего отличного от 0 минора матрицы A^t через r_4. Покажем, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$.

По лемме, $r_1 = r_3$. Далее, $r_2 = r_4$, поскольку система столбцов A есть система строк A^t, и далее используется лемма. $r_3 \leq r_4$, поскольку отличный от 0 минор матрицы A переходит при транспонировании в отличный от 0 минор матрицы A^t. Аналогично, $r_3 \geq r_4$, откуда $r_3 = r_4$.

$\square$

Определение. *Системой линейных уравнений называется система вида*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_1^1 x^1 & + & \dots & + & a_n^1 x^n & = & b^1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^m x^1 & + & \dots & + & a_n^m x^n & = & b^m \end{array} \right. \tag{3}$$

то есть, $\sum\limits_{k=j}^{1} n a_j^i x^j = b^i \ \forall i = 1, \dots, m$. *Матрица* $A = ||a_j^i||$ *называется матрицей системы, матрица* A *с добавлением столбца* b *– расширенной матрицей системы, обозначим ее* A_{ext}. *Наконец, если* $b = 0$*, система называется однородной.*

Отметим, что подстановка любого набора значений вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ дает линейную комбинацию столбцов матрицы. Поэтому, существование ненулевого решения у однородной системы эквивалентно линейной зависимости ее столбцов, то есть $\operatorname{rk} A < n$. В частности, это так при $m < n$, так как $\operatorname{rk} A \leq m$. Получаем

Предложение. *Если число уравнений меньше числа неизвестных, однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение.*

Кроме того, существование решения у неоднородной системы эквивалентно тому, что столбец b выражается линейной комбинацией столбцов матрицы A. Из этого можно вывести

Теорема. (Кронеккера-Капелли). *Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A_{ext}$.

Доказательство.

Обозначим $r_1 = \operatorname{rk} A$, $r_2 = \operatorname{rk} A_{ext}$. Очевидно, $r_1 \leq r_2$.

Пусть система имеет решение. Предположим, $r_1 < r_2$. Выберем в A_{ext} линейно независимую систему E из r_2 столбцов. Если она не включает b, то она есть подсистема столбцов A, где нет линейно независимых подсистем из более чем r_1 векторов. Поэтому, $E = E' \cup \{b\}$, E' – некоторая система столбцов A, она линейно независима, поэтому число векторов в ней $|E'| \leq r_1$.

С другой стороны, $|E'| = r_2 - 1 \geq r_1$, поэтому $|E'| = r_1$, и E' – макисмальная линейно независимая подисистема. Значит, все столбцы A выражаются через E' линейными комбинациями (столбец, который не выражается, может быть добавлен с сохранением линейной независимости – это легко следует из определения). Тогда b выражается через E' линейной комбинацией (система имеет решение). Но тогда E – линейно зависимая система – противоречие.

Пусть теперь система не имеет решения. Пусть E' – максимальная линейно независимая система столбцов A. Поскольку b не выражается линейной комбинацией E' (система не имеет решения), он может быть добавлен к E' с сохрананием линейной незавивмости. Получаем $E = E' \cup \{b\}$ – линейно независимая подсистема столбцов A_{ext} из $r_1 + 1$ столбца, поэтому $r_2 > r_1$.

$\square$

Если x_1 и x_2 – решения однородной системы, то $x_1 + x_2$, λx_1 – также решения (проверяется подстановкой). Поэтому множество решения системы является линейным подпространством в F^n, обозначим его V.

Определение. *Базис этого пространства назвается фундаментальной системой решений.*

Способ построения фундаментальной системы дается методом Гаусса. Из него следует, что $\dim V = n - \operatorname{rk} A$ (ранг A сохраняется при элементарных преобразованиях, поскольку сохраняются миноры).

Далее, если x_1 и x_2 – два решения неоднородной системы, то $x_1 - x_2$ – решение однородной. Обратно, если x_1 – решение неоднородной системы, x_2 – однородной, то $x_1 + x_2$ – решение неоднородной системы. Поэтому, множество решений неоднородной системы, имеющей хотя бы одно решение x_1, есть $x_1 + V$ – аффинное подпространство в F^n.

Билет 13.

Билинейные и квадратичные функции (формы). Приведение к нормальному виду.

Пусть V – линейное пространство над полем F.

Определение. *Функция $f(x,y) : V \times V \to F$ называется билинейной функцией (формой), если*

1) $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y)\ \forall x_1, x_2, y \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in F.$

2) $f(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 f(x, y_1) + \lambda_2 f(x, y_2)\ \forall x, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in F.$

Фиксируем в пространстве V базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда для любых двух $x, y \in V$, $x = \sum_{k=i}^{1} nx^i e_i$, $y = \sum_{k=j}^{1} ny^j e_j$. Подставляя эти разложения в $f(x,y)$, получаем по билинейности

$$f(x,y) = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} nx^i y^j f(e_i, e_j) = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} nx^i y^j g_{ij} \tag{1}$$

где $g_{ij} = f(e_i, e_j)$. Матрица $G = ||g_{ij}||$ называется матрицей билинейной формы. Легко видеть, что для любой матрицы G (1) задает билинейную функцию. Поэтому, между функциями и матрицами есть естественное взаимнооднозначное соответствие (при фиксированном базисе).

Рассмотрим новый базис $f_1, \ldots, f_n$, $f_i = \sum_{k=j}^{1} nc_i^j e_j$, $C = ||c_i^j||$ – матрица перехода. Тогда в новом базисе

$$g'_{ij} = f(f_i, f_j) = f(\sum_{k=k}^{1} nc_i^k e_k, \sum_{k=l}^{1} nc_j^l e_l) =$$

$$= \sum_{k=k}^{1} n \sum_{k=l}^{1} nc_i^k c_j^l f(e_k, e_l) = \sum_{k=k}^{1} n \sum_{k=l}^{1} nc_i^k g_{kl} c_j^l$$

или, в матричном виде, $G' = C^t G C$.

Определение. *Билинейная функция называется симметричной, если $\forall x, y \in V$, $f(x,y) = f(y,x)$.*

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием этого является $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$, то есть, матрица G – симметрична.

Определение. *Квадратичной функцией (формой) называется функция $f : V \to F$, которая в каком-либо базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет вид*

$$f(\sum_{k=i}^{1} nx^i e_i) = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} nx^i x^j q_{ij}$$

$Q = ||q_{ij}||$ называется матрицей квадратичной формы.

Любой форме однозначно сопоставляется матрица. Однако, разным матрицам могут соответствовать одинаковые функции. Именно, это будет так, если матрицы отличаются на кососимметричную ($Q_1 - Q_2 = Q$, $Q^t = -Q$). Для однозначности, будем считать матрицу Q симметричной.

Условие $G = Q$ взаимно однозначно сопоставляет в данном базисе квадратичные и симметричные билинейные формы. Эта биекция может быть задана инвариантным образом: симметричной билинейной форме f сопоставляется квадратичная форма g по правилу $g(x) = f(x,x)$. Обратно, $f(x,y) = \frac{1}{2}(g(x+y) - g(x) - g(y))$. Отсюда, квадратичная форма может быть представлена в указанном виде в любом базисе (сопоставляем ей билинейную форму и берем ее матрицу в качестве Q), причем ее матрица изменяется так же, как матрица билинейной формы $Q' = C^tQC$.

Теорема. *Пусть* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда для любой квадратичной формы (симметричной билинейной формы) существует такой базис, в котором ее матрица диагональна.*

Доказательство.

Будем строить такой базис по индукции по размерности пространства, для $\dim V = 1$ утвеждение очевидно. Пусть $\dim V = n > 1$.

Если $f = 0$, то матрица f в любом базисе нулевая, и утверждение тривиально. Далее считаем $f \neq 0$.

Поскольку $f \neq 0$, найдутся такие $a, b \in V$, что $f(a,b) \neq 0$. Для $t \in F$, $f(a+tb, a+tb) = t^2 f(b,b) + 2tf(a,b) + f(b,b)$ – нетривиальный полином над F ($\operatorname{char} F \neq 2$), в силу чего он имеет не более двух корней. Так как в F не менее трех элементов (опять из $\operatorname{char} F \neq 2$, 0, 1 и $1+1$ различны), найдется t, при котором он не 0. Итак, построено $u = a + tb$, $f(u,u) \neq 0$. Ясно, тогда $u \neq 0$.

Положим $e_1 = u$ и дополним до базиса пространства (любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса: будем последовательно добавлять вектора, не лежащие в линейной оболочке уже построенных, линейная независимось будет сохраняться. Когда количество векторов достигнет размерности пространства, их линейная оболочка совпадет со всем пространством, и система станет базисом). Итак, пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства.

Положим $f_1 = e_1$, $f_i = e_i - \frac{f(e_i,e_1)}{f(e_1,e_1)} e_1$ при $i > 1$. Легко убедиться, что $f_1, \dots, f_n$ - - также линейно независимы, следовательно, тоже базис. Далее, $f(f_1, f_i) = f(e_1, e_i) - f(e_1, e_1)\frac{f(e_i,e_1)}{f(e_1,e_1)} = 0$ при $i > 1$. Пусть W – линейная оболочка $f_2, \dots, f_n$, тогда для любого $w \in W$, $f(f_1, w) = 0$, и $f_1 \notin W$.

Построим в W диагонализирующий базис $h_2, \dots, h_n$ по предположению индукции, тогда $f(h_i, h_j) = 0$ при $i \neq j$. Положим $h_1 = f_1$. Тогда $f(h_i, h_1) = 0$ при $i > 1$, поскольку $h_i \in W$. Кроме того, $h_1 \notin W$, поэтому $h_1, \dots, h_n$ – базис V. Он является искомым диагонализирующим.

□

Если $F = R$, то можно построить базис, в котором на диагонали стоят 0, 1 или -1. Для этого, если на диагонали стоит $\alpha \neq 0$, возьмем соответсвующий базисный вектор e_i и поделим его на $\sqrt{|\alpha|}$, $e'_k = e_k/\sqrt{|\alpha|}$. При этом, в новом базисе $g'_{kk} = f(e'_k, e'_k) = \frac{1}{|\alpha|} f(e_k, e_k) = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1$.

Если $F = C$, то можно оставить на диагонали только 0 и 1. Для этого в предыдущем рассуждении надо делить на $\sqrt{\alpha}$. Отметим, это рассуждение проходит над любым алгебраически замкнутым полем. Над полем R, однако, от -1 избавится нельзя, как показывает следующая теорема.

Теорема. (Закон инерции). *Над полем* R, *количества* 0, 1 *и* -1 *на диагонали формы не зависят от диагонализирующего базиса.*

Доказательство.

Рассмотрим какой-нибудь диагонализирующий базис. Пусть $z_1, \dots, z_k$ – базисные вектора, соответствующие 0 в матрице формы, $p_1, \dots, p_s$ – соответствующие 1, и $q_1, \dots, q_t$ – -1. Из вида матрицы следует, что $f(q_i, q_j) = \delta_{ij}$ и $f(p_i, p_j) = -\delta_{ij}$. Далее, пусть $V_1 =< z_1, \dots, z_k >$, $V_2 =< p_1, \dots, p_s >$, и

$V_3 =< q_1, \ldots, q_t >$ – линейные оболочки соответствующих пространств. Тогда форма f задает разбиение пространства в прямую сумму подпространств $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Пространство V_1 определяется условием $V_1 = \{x|\forall y \in V, f(x,y) = 0$ (между прочим, V_1 называется ядром формы). Легко видеть, что в любом конкретном диагональном представлении V_1 будет именно таким. С другой стороны, это условие инвариантно (не зависит от базиса), поэтому $\dim V_1 = k$ – не зависит от базиса, и k определено однозначно.

Пусть теперь есть два разных базиса с двумя различными разбиениями $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ и $V = V_1 \oplus V_2' \oplus V_3'$ (как уже говорилось, V_1 определено однозначно). $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = s$, $\dim V_3 = t$, $\dim V_2' = s'$ и $\dim V_3' = t'$. Кроме того, $k + s + t = k + s' + t' = n$. Надо доказать, что $s = s'$ и $t = t'$.

Предположим, что $s \neq s'$, для определенности, $s > s'$. Тогда $s + t' > s' + t' = n - k$, поэтому $s + t' + k > n$.

Пусть $z_1, \ldots, z_k$ – базис V_1, $p_1, \ldots, p_s$ – базис V_2, $q_1, \ldots, q_{t'}$ – базис V_3 (все базисы – части диагонализирующих). Поскольку общее количество этих векторов превышает размерность V, они линейно зависимы. Значит, существует нетривиальная линейная комбинация, равная 0:

$$S = \sum_{k=i}^{1} k\alpha_i z_i + \sum_{k=i}^{1} s\beta_i p_i + \sum_{k=i}^{1} t'\gamma_i q_i = z + p + q = 0$$

Поскольку z, p и q являются линейными комбинациями базисных векторов в соответствующих подпространствах, в силу нетривиальности линейной комбинации, хотя бы один из них не равен 0. Значит, хотя бы два не равны 0.

Пусть $p \neq 0$, тогда $f(p,p) = \sum_{k=i}^{1} k \sum_{k=j}^{1} k\beta_i\beta_j f(p_i, p_j) =$ (используем то, что $f(p_i, p_j) = \delta_{ij}$ – отмечалось выше) $= \sum_{k=i}^{1} k\beta_i^2 > 0$. *Здесь используется то, что* $F = R$. Аналогично, если $q \neq 0$, то $f(q,q) < 0$.

Если $q = 0$, то $p = -z$, но $f(p,p) > 0$, а $f(z,z) = 0$ – противоречие. Если же $q \neq 0$, то $q = -p - z$. $0 > f(q,q) = f(-p-z, -p-z) = f(p+z, p+z) = f(p,p) + f(p,z) + f(z,p) + f(z,z) =$ (поскольку $z \in V_1$, $f(x,z) = 0\ \forall x \in V) = f(p,p) \geq 0$ – противоречие. Это противоречие показывает, что $s = s'$, откуда $t = t'$.

$\square$

Над C (и над любым другим алгебраически замкнутым полем) инвариантно количество 0. Это следует из доказательства предыдущей теоремы: при доказательстве инвариантности k нигде не использовалось, что $F = R$.

Билет 14.

Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

Пусть V – линейное пространство над полем F.

Определение. *Отображение $f(x): V \to V$ линейным, если*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in F$$

Фиксируем в пространстве V базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда для любого $x \in V$, $x = \sum\limits_{k=i}^{1} n x^i e_i$. В частности, $f(e_i) = \sum\limits_{k=j}^{1} n a_i^j e_j$. Далее, по линейности

$$f(x) = f\left(\sum_{k=i}^{1} n x^i e_i\right) = \sum_{k=i}^{1} n x^i f(e_i) =$$

$$= \sum_{k=i}^{1} n x^i \sum_{k=j}^{1} n a_i^j e_j = \sum_{k=j}^{1} n \left(\sum_{k=i}^{1} n a_i^j x^i\right) e_j \tag{1}$$

Матрица $A = ||a_i^j||$ называется матрицей линейного отображения. (1) показывает, что в фиксированном базисе существует естественная биекция между матрицами и линейными отображениями. Кроме того, если X – координаты x, X' – координаты $f(x)$, то, в матричной форме, $X' = AX$.

Рассмотрим новый базис $f_1, \ldots, f_n$, $f_i = \sum\limits_{k=j}^{1} n c_i^j e_j$, $C = ||c_i^j||$ – матрица перехода. Далее, $e_i = \sum\limits_{k=j}^{1} n d_i^j f_j$, $D = ||d_i^j||$ – матрица обратного перехода. Легко видеть, $D = C^{-1}$. В новом базисе

$$f(f_i) = f(\sum_{k=j}^{1} n c_i^j e_j) = \sum_{k=j}^{1} n c_i^j f(e_j) = \sum_{k=j}^{1} n c_i^j \sum_{k=k}^{1} n a_j^k e_k =$$

$$= \sum_{k=j}^{1} n c_i^j \sum_{k=k}^{1} n a_j^k \sum_{k=l}^{1} n d_k^l f_l = \sum_{k=l}^{1} n \left(\sum_{k=j}^{1} n \sum_{k=k}^{1} n d_k^l a_j^k c_i^j\right) f_l$$

или, в матричном виде, $A' = C^{-1}AC$.

Определение. *Вектор $0 \neq v \in V$ называется собственным вектором линейного отображения f, если $\exists \lambda \in F$, $f(v) = \lambda v$. λ называется собственным значением линейного отображения f.*

В координатах уравнение $f(v) = \lambda v$ принимает вид $Av = \lambda v$, или $(A - \lambda E)v = 0$. Это однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}(A - \lambda E) < n$. Это означает, что у матрицы $A - \lambda E$ нет ненулевых миноров порядка n, то есть $\det(A - \lambda E) = 0$.

Итак, λ является собственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$\det(A-\lambda E)$ есть сумма произведений по n различных элементов матрицы $A-\lambda E$, каждый из которых имеет вид $a^i_i - \lambda$ или a^i_j. Поэтому, $\det(A - \lambda E)$ есть многочлен степени n от λ.

Определение. *Он называется характеристическим многочленом линейного отображения. Его корни называются характеристическими корнями.*

Из вышесказанного следует, что характеристические корни линейного отображения – это его собственные значения. В частности, если F алгебраически замкнуто, существует хотя бы один характеристический корень, и, соответственно, хотя бы один собственный вектор.

Теорема. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – различные собственные значения линейного отображения f, $v_1, \dots, v_m$ – соответствующие собственные вектора. Пусть они линейно зависимы. Не ограничивая общности, можно считать, что $v_1, \dots, v_{m-1}$ линейно независимы, и v_n через них выражается.

Итак, пусть $\sum\limits_{k=i}^{1} m - 1c_i v_i = v_m$. Подействовав на это равенство f, получим $\sum\limits_{k=i}^{1} m - 1c_i \lambda_i v_i = \lambda_m v_m = \sum\limits_{k=i}^{1} m - 1c_i \lambda_m v_i$. Отсюда, $\sum\limits_{k=i}^{1} m - 1c_i(\lambda_i - \lambda_m)v_i = 0$, и, из линейной независимости v_i, $\forall i$, $c_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$, и $c_i = 0$ из различности λ_i. Так как $\sum\limits_{k=i}^{1} m - 1c_i v_i = v_m$, $v_m = 0$, что противоречит определению собственного вектора.

$\square$

Билет 15.

Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Пусть V – линейное пространство над полем R.

Определение. *Билинейная симметрическая форма называется положительно определенной, если* $\forall 0 \neq x \in V,\ f(x,x) > 0$.

Определение. *Скалярным произведением в пространстве называется некоторая фиксированная билинейная симметричная положительно определенная форма. Пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Скалярное произведение векторов* $x, y \in V$ *записывается как* $< x, y >$.

Согласно теореме о приведении к нормальному виду, существует базис, в котором матрица этой формы диагональна, причем на диагонали стоят 0, 1 или -1. В силу положительной определенности, 0 и -1 нет, то есть, нормальный вид такой матрицы – единичная матрица.

Определение. *Базисы, в которых матрица скалярного произведения единична, называются ортонормированными.*

Замечание. *В таких базисах скалярное произведение вектора* x *с координатами* $x^1, \ldots, x^n$ *и вектора* y *с координатами* $y^1, \ldots, y^n$*, вычисляется как*

$$< x, y >= \sum_{k=i}^{1} n x^i y^i \tag{1}$$

В частности, базисные вектора ортогональны, и $< e_i, e_i >= 1$*. Легко видеть, что это и достаточное условие ортонормированности базиса.*

Определение. *Матрицы перехода между ортонормированными базисами называются ортогональными матрицами.*

Предложение. *Матрица* C *ортогональна тогда и только тогда, когда* $C^t = C^{-1}$.

Доказательство.

Пусть B_1, B_2 – два базиса, C – матрица перехода между ними. Пусть B_1 ортонормирован, тогда матрица скалярного произведения в B_1 – матрица E. C будет ортогональной матрицей тогда и только тогда, когда B_2 ортонормирован, что равносильно тому, что матрица скалярного произведения в B_2 – матрица E. Но матрица скалярного произведения в B_2 имеет вид $C^tEC = C^tC$. Поэтому, матрица C ортогональна тогда и только тогда, когда $C^tC = E$, $C^t = C^{-1}$.

$\square$

Предложение. *Матрица* C *ортогональна тогда и только тогда, когда* $\forall x, y \in V,\ < Cx, Cy >=< x, y >$ *в ортонормированном базисе.*

Доказательство.

В матричной форме (1) выглядит $< x, y >= x^t y$. Тогда $< Cx, Cy >= (Cx)^t Cy = x^t C^t C y$. Если $C^tC = E$, то утверждение очевидно. Обратно: пусть $G = C^tC$, тогда положим $x = e_i$, $y = e_j$, тогда $< x, y >= \delta_{ij}$, а $x^t G y = g_{ij}$.

$\square$

Определение. *Линейное отображение* f *называется симметрическим преобразованием, если* $\forall x, y \in V,\ < f(x), y >=< x, f(y) >$.

Предложение. *В ортонормированных базисах симметрические преобразования выражаются симметричными матрицами, то есть $A = A^t$.*

Доказательство.

Фиксируем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$. Пусть матрица f в этом базисе – матрица $A = ||a_i^j||$. Тогда $< f(x), y >= \sum_{k=j}^{1} n \sum_{k=i}^{1} n a_i^j x^i y^j$, $< x, f(y) >= \sum_{k=j}^{1} n \sum_{k=i}^{1} n a_i^j y^i x^j = \sum_{k=j}^{1} n \sum_{k=i}^{1} n a_j^i x^i y^j$. Если $a_j^i = a_i^j$, то равенство имеет место. В обратную сторону, пусть $x = e_k$, $y = e_l$. Тогда $< f(x), y >= a_k^l$, $< x, f(y) >= a_l^k$. $\square$

Рассмотрим функцию $g(x, y) =< x, f(y) >$. Это – симметрическая билинейная форма. В ортонормированных базисах ее матрица G равна матрице A по определению, так как $g(x, y) = \sum_{k=j}^{1} n \sum_{k=i}^{1} n a_i^j y^i x^j$. Тогда, взяв любую симметрическую билинейную форму, можно представить ее в виде $g(x, y) =< x, f(y) >$, задав f как отображение, матрица которого совпадает с матрицей g в некотором ортонормированном базисе. Итак, построено взаимнооднозначное соответствие между симметрическими билинейными формами и ортогональными преобразованиями.

Теорема. *Для любой симметрической билинейной формы существует такой ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна.*

Доказательство.

В силу вышеизложенного, достаточно искать такой ортонормированный базис, в котором матрица f будет диагональна. Это будет иметь место тогда и только тогда, когда все базисные вектора собственны для f. Будем действовать по индукции по размерности пространства. Для $\dim V = 1$ утверждение очевидно. Пусть $\dim V = n$.

Фиксируем какой-нибудь ортонормированный базис, в нем f задается симметричной матрицей $A = ||a_{ij}||$. Далее, характеристический многочлен имеет в C корень λ. Матрица $B = (A - \lambda E)$ – комплексная вырожденная, а потому существует $0 \neq u \in C^n$, $Bu = 0$. Пусть $u = (u^1, \ldots, u^n)$. Кроме того, $Au = \lambda u$, в координатной записи $\sum_{k=i}^{1} n a_i^j u^i = \lambda u^j$.

Обозначим $S = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} n a_i^j u^i \overline{u^j}$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Тогда (учитывая, что A – вещественная матрица), $\overline{S} = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} n a_i^j \overline{u^i} u^j = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} n a_j^i u^i \overline{u}^j = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} n a_i^j u^i \overline{u}^j = S$. Поэтому, $S \in R$. С другой стороны, $S = \lambda \sum_{k=i}^{1} n u^i \overline{u^i} = \lambda W$, $W \in R$, $W > 0$. Отсюда, $\lambda \in R$.

Итак, характеристический многочлен имеет корень в R, а потому f имеет в V собственный вектор $e \neq 0$. Можно выбрать e так, что $< e, e >= 1$ (иначе поделим e на $\sqrt{< e, e >}$, что корректно, так как $< e, e >$ положительно). Определим W условием $W = \{x| < x, e >= 0\}$. В координатах условие $< x, e >= 0$ является линейным уравнением на x, поэтому W – линейное подпространство в V. Его размерность равна $n - 1$, поскольку "матрицей"указанной линейной системы является $e \neq 0$, следовательно, ее ранг 1.

$\forall x \in W$, $< f(x), e >=< x, f(e) >=< x, \lambda e >= \lambda < x, e >= 0$, поэтому $f(x) \in W$ и W f-инвариантно. Значит, можно рассмотреть ограничение f на W, и найти диагонализирующий базис $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ в W по предположению индукции.

Система $e_1, \ldots, e_{n-1}, e$ линейно независима в V. В противном случае $e = \sum\limits_{k=i}^{1} n - 1c_ie_i$, $< e, e >= \sum\limits_{k=i}^{1} n - 1c_i < e_i, e >= 0$, поскольку $e_i \in W$. Итак, $e_1, \ldots, e_{n-1}, e$ – базис в V. Далее, он ортонормирован, так как все e_i ортонормированы по предположению индукции, а e ортогонален им и $< e, e >= 1$ по построению. Наконец, это – собственный базис для f (опять, e_i – по предположению индукции, e – по построению).

□

Далее, соответствующая квадратичная форма в таком базисе имеет вид

$$\sum_{k=i}^{1} n\lambda_i x_i^2 \tag{1}$$

Операция нахождения такого базиса называется приведением формы к главным осям. Отметим, что в этом случае матрица f, совпадающая с матрицей формы, диагональна с λ_i на диагонали, но тогда λ_i – собственные числа f, которые определены независимо от базиса. Поэтому, для квадратичной формы вид (1) определен однозначно с точностью до перестановки λ_i).

Билет 16.

Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.

Определение. *Множество G с операцией $\cdot : G \times G \to G$ называется группой, если выполнены следующие три акисомы:*

1) $a(bc) = (ab)c \ \forall a, b, c \in G$.
2) *$\exists e \in G$ такое, что $\forall a \in G$, $ae = ea = a$. e называется единицей или нейтральным элементом группы.*
3) *$\forall a \in G$, $\exists b \in G$, $ab = ba = e$. b обозначается a^{-1} и называется обратным элементом к a.*

Определение. *Количество элементов в G называется порядком G и обозначается $|G|$.*

Определение. *Непустое подмножество $H \subset G$ называется подгруппой, если оно замкнуто относительно операции $\cdot$ и взятия обратного элемента.*

Замечание. *Тогда H содержит $e = aa^{-1}$ для некоторого $a \in H$.*

Определение. *Для любой подгруппы H и любого элемента $g \in G$, $gH = \{gh | h \in H\}$ – левый смежный класс элемента g по подгруппе H.*

Аналогично определяется правый смежный класс Hg.

Лемма. *Если два смежных класса $g_1 H$ и $g_2 H$ пересекаются, то они совпадают.*

Доказательство.

Пусть $x \in g_1 H \cap g_2 H$. Пусть $y \in g_1 H$, покажем, $y \in g_2 H$. Все h_i ниже из H.

Из $x = g_1 h_1 = g_2 h_2$ получается $g_1 = g_2 h_2 h_1^{-1}$, откуда $y = g_1 h_3 = g_2 h_2 h_1^{-1} h_3 \in g_2 H$, так как $h_2 h_1^{-1} h_3 \in H$, так как H – подгруппа.

□

Замечание. *$g_1 H = g_2 H$ тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2 h$ для некоторого $h \in H$.*

Определение. *Если $\forall g \in G$, $gH = Hg$, то подгруппа H называется нормальной, запись $H \triangleleft G$.*

Теорема. (Лагранжа). *Пусть G – конечная группа, H – подгруппа в G. Тогда G разбивается в объединение непересекающихся смежных классов по подгруппе H, каждый из которых содержит столько же элементов, сколько и H.*

Доказательство.

Во-первых, $H = eH$ – смежный класс. Пусть уже построены классы (различные) $g_1 H, \ldots, g_k H$, они не пересекаются по лемме. Если $\bigcup\limits_i g_i H \neq G$, то существует $g \in G - \bigcup\limits_i g_i H$, построим gH. Если gH пересекается с одним из построенных классов, то он с ним совпадает. В этом случае g в нем лежит (так как $g = ge \in gH$), что противоречит выбору g. Итак, построен новый смежный класс. Количество элементов в нем равно порядку H, так как он содержит элементы вида gh для всех $h \in H$, и они все различны (из $gh_1 = gh_2$ следует $h_1 = h_2$ – надо домножить слева на g^{-1}).

Количество элементов в $G - \bigcup\limits_i g_i H$ убывает при этом процессе, в силу конечности G, процесс конечен.

□

Определение. *Количество смежных классов называется индексом группы G по подгруппе H и обозначается $(G:H)$.*

Из теоремы Лагранжа, $(G:H)\cdot|H|=|G|$, откуда порядок H делит порядок G.

Определим $g^k = \underbrace{g\cdots g}_{k}$ для натуральных k. Распространим это на целые k, положив $g^{-k}=(g^{-1})^k$, $g^0=e$. Тогда

Предложение. $g^{k+m}=g^kg^m$.

Доказательство.

Если один из k и m равен 0, утверждение очевидно из $g^ke=g^k$, $eg^m=g^m$. Если k и m одного знака, то утверждение также очевидно из ассоциативности умножения (в определении будет $k+m$ сомножителей слева и справа). Если же k и m разных знаков, $|k-m|$ пар gg^{-1} или $g^{-1}g$ "сократится", и опять получится желаемый ответ.

□

В частности, отсюда следует, что $g^{-k}=(g^k)^{-1}$.

Далее, легко видеть, что $H=<g>=\{g^k|\forall k\}$ является подгруппой.

Определение. *Она называется подгруппой, порожденной элементом g.*

Определение. *Пусть существует такое положительное k, что $g^k=e$. Наименьшее такое k называется порядком элемента g. g называется элементом конечного порядка.*

Замечание. *Если G конечна, то найдется такое положительное k, что $g^k=e$. В самом деле, будем строить $e,g,g^2,\ldots$. В силу конечности группы, найдутся $m\neq n$, $g^m=g^n$. Пусть $m>n$, тогда $g^{m-n}=g^m(g^n)^{-1}=e$.*

Легко видеть, что, если g конечного порядка k, то $<g>=\{e,g,g^2,\ldots,g^{k-1}\}$, остальные элементы будут совпадать с этими. Отсюда, $|<g>|=k$. Поскольку порядок подгруппы делит порядок группы, получаем

Предложение. *В группе конечного порядка порядок любого элемента конечен и делит порядок группы.*

Определение. *Группа G называется циклической, если существует $g\in G$ такой, что $G=<g>$.*

Если порядок некоторого элемента g группы G совпадает с порядком G, то $|<g>|=|G|$, поэтому $<g>=G$, и G – циклическая.

Пусть есть группа G и нормальная подгруппа H. Рассмотрим множество смежных классов $G/H=\{gH\}$, $g\in G$, и введем на нем операцию $g_1H\cdot g_2H=(g_1g_2)H$.

Предложение. *Это определение корректно.*

Доказательство.

Всюду ниже $h_i\in H$. Пусть $g_1H=g_1'H$, $g_2H=g_2'H$. Тогда $g_1'=g_1h_1$, $g_2'=g_2h_2$. $h_1g_2\in Hg_2=g_2H$, поэтому, существует такое h_3, что $h_1g_2=g_2h_3$. Теперь $g_1'g_2'=g_1h_1g_2h_2=g_1g_2h_3h_2$, поэтому, $(g_1'g_2')H=(g_1g_2)H$.

□

При таком определении, $eH\cdot gH=gH\cdot eH=gH$, и $(g^{-1})H\cdot gH=gH\cdot g^{-1}H=eH=H$. Итак, G/H является группой относительно введенной операции.

Определение. *Эта группа называется факторгруппой группы G по подгруппе H.*

Определение. *Пусть G, H – две группы. Отображение $f : G \to H$ называется гомоморфизмом, если $\forall g_1, g_2 \in G$, $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$.*

Отметим, что тогда $f(g)f(e) = f(ge) = f(g)$ (и с другой стороны), поэтому $f(e)$ – единица H. Далее, $f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(e)$ (и с другой стороны), поэтому $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$.

Определение. *Если гомоморфизм f – биекция, то f называется изоморфизмом.*

Определение. $\operatorname{Ker} f = \{g \in G | f(g) = e\}$ *– ядро гомоморфизма f.* $\operatorname{Im} f = \{f(g) | g \in G\} \subset H$ *– образ группы G при гомоморфизме f.*

Очевидно, $e \in \operatorname{Ker} f$.

Предложение. *Гомоморфизм f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} f = e$ *и* $\operatorname{Im} f = H$*.*

Доказательство.

Очевидно, $\operatorname{Im} f = H$ эквивалентно сюръективности. Поэтому, если при этом условии f – не изоморфизм, то $\exists g \neq h \in G$, $f(g) = f(h)$, тогда $f(g^{-1}h) = e$, и $e \neq g^{-1}h \in \operatorname{Ker} f$. Обратно, если $e \neq g \in \operatorname{Ker} f$, то $f(g) = e = f(e)$.

□

Теорема. (О гомоморфизме). *Если f – гомоморфизм из G в H, то его ядро* $\operatorname{Ker} f$ *– нормальная подгруппа в G, его образ* $\operatorname{Im} f$ *– подгруппа в H, и факторгруппа* $G/\operatorname{Ker} f$ *изоморфна* $\operatorname{Im} f$*. Обратно, любая нормальная подгруппа является ядром некоторого гомоморфизма.*

Доказательство.

Если $h_1, h_2 \in \operatorname{Im} f$, то $h_1 = f(g_1)$, $h_2 = f(g_2)$, но тогда $h_1 h_2 = f(g_1 g_2) \in \operatorname{Im} f$. Включение обратных элементов проверяется аналогично из $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$. Итак, $\operatorname{Im} f$ – подгруппа.

Если $g_1, g_2 \in \operatorname{Ker} f$, то $f(g_1) = e = f(g_2)$. Тогда $f(g_1 g_2) = e$, и $g_1 g_2 \in \operatorname{Ker} f$. Далее, $f(g_1^{-1}) = f(g_1^{-1})e = f(g_1^{-1})f(g_1) = f(e) = e$, так что, $g_1^{-1} \in \operatorname{Ker} f$. Итак, $\operatorname{Ker} f$ – подгруппа, обозначим ее N.

Покажем для $g \in G$, $gN = Ng$. В самом деле, пусть $h \in Ng$, тогда $hg^{-1} \in N$, $f(hg^{-1}) = e$. Тогда $f(h)^{-1} = f(g^{-1})$, поэтому $f(g^{-1}h) = f(g^{-1})f(h) = e$. Отсюда, $g^{-1}h \in N$, и $h \in gN$. Итак, $Ng \subset gN$, обратное включение проверяется аналогично.

Построим отображение $w : G/N \to \operatorname{Im} f$ по правилу $gN \to f(g)$. Во-первых, это корректно: $g_1 N = g_2 N$ тогда и только тогда, когда $g_1 = g_2 h$, $h \in N$, иначе говоря, $g_1 g_2^{-1} \in N = \operatorname{Ker} f$, что равносильно $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)^{-1} = e$, $f(g_1) = f(g_2)$. Отсюда же следует, что w инъективно. С другой стороны, w – сюръективно, поскольку у любого элемента $f(g)$ из $\operatorname{Im} f$ есть прообраз gN. Итак, w – биекция. Наконец, $w(g_1 H \cdot g_2 H) = w((g_1 g_2)H) = f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2) = w(g_1 H)w(g_2 H)$, так что w – гомоморфизм, и, значит, изоморфизм.

Наконец, пусть H – нормальная подгруппа в G. Построим отображение $f : G \to G/H$ по правилу $f(g) = gH$. По определению умножения в факторгруппе, это гомоморфизм. Кроме того, $h \in \operatorname{Ker} f$ тогда и только тогда, когда $gH = eH$, что эквивалентно $g = eh \in H$. Итак, $\operatorname{Ker} f = H$, что доказывает последнее утверждение теоремы. Отметим, что построенный гомоморфизм называется каноническим.

□

Билет 17.

Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

Определение. *Кривой второго порядка называется поверхность в R^n, неявно задаваемая в некотором репере уравнением вида*

$$Q(x) = \sum_{k=i}^{1} n \sum_{k=j}^{1} na_{ij}x_ix_j + \sum_{k=i}^{1} nb_ix_i + c$$

где $a_{ij}, b_i, c \in R$.

Несложно видеть, что тогда она задается таким уравнением в любом другом репере.

Определение. *Аффинным преобразованием называется преобразование, представимое в виде композиции линейного преобразования и параллельного переноса.*

Определение. *Две поверхности называются аффинно эквивалентными, если существует такое аффинное преобразование (замена координат), что уравнение первой кривой в одной системе совпадает с уравнением второй кривой в другой системе.*

Теорема. (об аффинной классификации). *Любая поверхность в R^n аффинно эквивалентна поверхности, задаваемой одним из следующих уравнений:*

1) *$x_1^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_{k+l}^2 = 0$, где $k \geq l$. Поверхности такого вида называются квадратичными конусами.*

2) *$x_1^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_{k+l}^2 = 1$, где $k > 0, l \geq 0$. К этому виду относятся эллипсоиды и гиперболоиды, а также эллиптические и гиперболические конусы. Примечание: при $k = 0$ уравнение задает пустое множество.*

3) *$x_1^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_{k+l}^2 = x_{k+l+1}$, где $k \geq l \geq 0$, $k > 0$. Поверхности этого типа называются параболоидами или параболическими цилиндрами.*

Доказательство.

Сначала, по теореме о приведении к нормальной форме, можно привести к нормальной форме квадратичную часть $Q(x)$. Получим выражение вида:

$$\sum_{k=i}^{1} k(x_i^2 + b_ix_i) - \sum_{k=i}^{k+1} k + l(x_i^2 + b_ix_i) + \sum_{k=i}^{k+l+1} nb_ix_i + c = 0$$

Затем, верно равенство $x^2 + bx = y^2 - \frac{b^2}{4}$, где $y = x + \frac{b}{2}$. Согласно ему, положим $y_i = x_i + \frac{b_i}{2}$. Далее, если $\sum\limits_{k=i}^{k+l+1} nb_ix_i + c$ – не константа, положим $y_{k+l+1} = \sum\limits_{k=i}^{k+l+1} nb_ix_i + c$. Еще не определенные координаты доопределим так, чтобы получилась корректная замена координат (на самом деле, здесь построена система линейно независимых векторов, которую надо дополнить до базиса, и часть координат точки отсчета, остальные задаются произвольно), получим один из трех случаев:

1) $\sum\limits_{k=i}^{1} ky_i^2 - \sum\limits_{k=i}^{k+1} k + ly_i^2 = 0.$

2) $\sum\limits_{k=i}^{1} ky_i^2 - \sum\limits_{k=i}^{k+1} k + ly_i^2 = c$, $c \neq 0$.

3) $\sum\limits_{k=i}^{1} ky_i^2 - \sum\limits_{k=i}^{k+1} k + ly_i^2 = by_{k+l+1}$, $b \neq 0$.

Если $b < 0$ или $c < 0$, умножим уравнение на -1, и переставим координаты. Теперь, во втором случае поделим уравнение на $a = c$, во третьем – на $a = b$, и положим $y_i' = \frac{y_i}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$. В результате, получим уравнения с $b = 1$ или $c = 1$, соответственно.

Теперь, если в первом или в третьем случае $k < l$, умножим уравнение на -1 и переставим координаты. В третьем случае положим $y_{k+l+1}' = -y_{k+l+1}$.

Наконец, в третьем случае при $k = 0$ получается уравнение $x_1 = 0$. Оно равносильно уравнению $x_1^2 = 0$ первого типа.

□

Приведем список поверхностей в R^2 и R^3.

R_2, тип 1.

1) $k = 2, l = 0$ Одна точка.

2) $k = 1, l = 1$ Две пересекающиеся прямые.

3) $k = 1, l = 0$ Прямая.

4) $k = 0, l = 0$ Вся плоскость.

R_2, тип 2.

1) $k = 2, l = 0$ Эллипс.

2) $k = 1, l = 1$ Гипербола.

3) $k = 1, l = 0$ Две параллельные прямые.

R_2, тип 3.

1) $k = 1, l = 0$ Парабола.

R_3, тип 1.

1) $k = 3, l = 0$ Одна точка.

2) $k = 2, l = 1$ Конус.

3) $k = 2, l = 0$ Прямая.

4) $k = 1, l = 1$ Две пересекающиеся плоскости.

5) $k = 1, l = 0$ Плоскость.

6) $k=0, l=0$ Все пространство.

R_3, тип 2.

1) $k=3, l=0$ Эллипсоид.

2) $k=2, l=1$ Однополостный гиперболоид.

3) $k=2, l=0$ Эллиптический цилиндр.

4) $k=1, l=2$ Двуполостный гиперболоид.

5) $k=1, l=1$ Гиперболический цилиндр.

6) $k=1, l=0$ Две параллельные плоскости.

R_3, тип 3.

1) $k=2, l=0$ Эллиптический параболоид.

2) $k=1, l=1$ Гиперболический параболоид.

3) $k=1, l=0$ Параболический цилиндр.

Вопрос об эквивалентности поверхностей разных типов более сложен. Вкратце изложим основные соображения, которыми можно пользоваться. При этом запись [a,b,c] будет означать поверхность в R^a типа b подтипа c в списке сверху.

Во-первых, следующие поверхности являются аффинными подпространствами: [2,1,1], [2,1,3], [2,1,4], [3,1,1], [3,1,3], [3,1,5], [3,1,6]. Ясно, что аффинные подпространства разной размерности не эквивалентны между собой и не эквивалентны поверхностям, не являющимся аффинными подпространствами. (Впрочем, отметим, что эти случаи, строго говоря, не относятся к поверхностям второго порядка, поскольку могут быть заданы уравнениями первого порядка).

Далее, поверхности, не имеющие центра симметрии (поверхности типа 3), не эквивалентны поверхностям, имеющим его (поверхности типа 1,2), поскольку аффинные преобразования переводят симметричные точки в симметричные.

В R^2 поверхность типа 3 единственна [2,3,1], поэтому с ней вопрос решен. В R^3 их 3: [3,3,1], [3,3,2], [3,3,3]. Далее, для эллиптического параболоида [3,3,1] и параболического цилиндра [3,3,3] существует плоскость, относительно которой они лежат в одном полупространстве. Это – аффинно инвариантное свойство, и [3,3,2] ему не удовлетворяет. Наконец, [3,3,3] содержит прямые, в отличие от $[3,3,1]$.

Далее, среди типов 1 и 2 бывают связные и несвязные поверхности. Очевидно, связные не эквивалентны несвязным. К связным относятся [2,1,2], [2,2,1], [3,1,2], [3,1,4], [3,2,1], [3,2,2], [3,2,3], к несвязным – [3,2,4], [3,2,5], [3,2,6], [2,2,2], [2,2,3].

Далее, поверхности, являющиеся объединением аффинных подпространств, не эквивалентны прочим. К этому типу относятся [2,1,2], [3,1,4], [2,2,3], [3,2,6]. Поскольку они имеют разную связность, вопрос с ними решен.

В R^2 осталась одна связная поверхность [2,2,1] и одна несвязная [2,2,2], они не эквивалентны.

В R^3 остались две несвязные поверхности: двуполостный гиперболоид [3,2,4] и гиперболический цилиндр [3,2,5], последний отличается тем, что существует нетривиальный параллельный перенос, переводящий его в себя.

Наконец, в R^3 остались четыре связные поверхности: эллипсоид [3,2,1], отличающийся тем, что он ограничен, конус [3,1,2], отличающийся тем, что он содержит свой центр симметрии, однополостный гиперболоид [3,2,2] и эллиптический цилиндр [3,2,3]. Последний от предпоследнего также отличается существованием параллельного переноса, переводящего его в себя.

Определение. *Изометрией называется аффинное преобразование, сохраняющее расстояния между точками.*

Замечание. *Из сохранения расстояний следует сохранение углов, поэтому ортонормированные реперы переходя в ортонормированные. Отсюда, изометрии есть композиции ортогональных преобразований и параллельных переносов.*

Определение. *Две поверхности называются изометричными, если существует такая изометрическая замена координат, что уравнение первой кривой в одной системе совпадает с уравнением второй кривой в другой системе.*

Теорема. (о метрической классификации). *Любая поверхность в R^n изометрична поверхности, задаваемой одним из следующих уравнений:*

1) $\sum_{k=i}^{1} k\lambda_i x_i^2 = 0$

2) $\sum_{k=i}^{1} k\lambda_i x_i^2 = 1$

3) $\sum_{k=i}^{1} k\lambda_i x_i^2 = x_{k+1}$

$\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство.

Ортогональным преобразованием можно привести форму к главным осям, то есть, к виду

$$\sum_{k=i}^{1} k\lambda_i(x_i^2 + b_i x_i) + \sum_{k=i}^{k+1} n b_i x_i + c = 0$$

Далее, как и в прошлой теореме, параллельным переносом можно сделать $b_i = 0$ при $\lambda_i \neq 0$. Затем, если присутствует линейная часть, поворотом в координатах $x_{k+1}, \ldots, x_n$ можно привести линейную часть, если она есть, к виду bx_{k+1}. При $b \neq 0$, можно параллельным переносом убрать c. Наконец, если $b \neq 0$ или $c \neq 0$, можно сделать их равными единице делением уравнения на них (b надо сделать равным -1, чтобы затем перенести в другую часть). После этого получается искомый вид.

□

Отметим, что после этого сжатием или растяжением базиса по разным осям можно привести форму к виду из теоремы об аффинной классификации. Соответственно, получатся те же самые типы, но теперь внутри одного типа не все поверхности будут эквивалентны друг другу. Показать связь метрических параметров поверхности с коэффициентами уравнения, из которой следует метрическая неэквивалентность, можно в каждом конкретном случае.

Определение. *Рассмотрим пространство R^3 без нуля, и назовем вектора эквивалентными, если они пропорциональны. Множество классов эквивалентности называется проективной плоскостью RP^2.*

Определение. *Проективным преобразованием называется преобразование проективной плоскости, индуцируемое линейным преобразованием R^3.*

Это определение корректно, поскольку линейные преобразования переводят пропорциональные вектора в пропорциональные.

Далее, пространство R^2 может быть вложено в RP^2 следующим отображением: $(x, y) \to (x, y, 1)$.

При таком вложении уравнение любой кривой примет вид

$$\sum_{k=i}^{1} 3a_{ij}x_ix_j = 0$$

Определение. *Две кривые называются проективно эквивалентными, если существует такое проективное преобразование (замена координат), что уравнение первой кривой при вложении в проективное пространство в одной системе совпадает с уравнением второй кривой в другой системе.*

Теорема. (о проективной классификации). *Любая поверхность в R^n аффинно эквивалентна одной из следующих поверхностей:*

1) *овал (эллипс, гипербола или парабола);*
2) *пара прямых;*
3) *прямая;*
4) *точка.*

Доказательство.

Рассмотрим в R^3 соответствующую квадратичную форму

$$\sum_{k=i}^{1} 3a_{ij}x_ix_j$$

и приведем ее к нормальному виду. Упорядочим координаты так, чтобы сначала шли 1, затем -1 и в конце 0. При этом, уравнение поверхности в проективных координатах примет один из следующих видов

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$;
2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;
3) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$;

4) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0;$

5) $x_1^2 + x_2^2 = 0;$

6) $x_1^2 - x_2^2 = 0;$

7) $-x_1^2 - x_2^2 = 0;$

8) $x_1^2 = 0;$

9) $-x_1^2 = 0;$

Далее, попарно эквивалентны с помощью умножения уравнения на -1 следующие уравнения: 1 и 4, 2 и 3, 5 и 7, 8 и 9. Уравнение 1 не имеет решений на проективной плоскости, поскольку ему удовлетворяет только $(0, 0, 0)$, который в RP^2 не лежит. Остаются:

1) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$

2) $x_1^2 + x_2^2 = 0;$

3) $x_1^2 - x_2^2 = 0;$

4) $x_1^2 = 0;$

Первое уравнение задает кривые, называемые овалами. В аффинных координатах ему соответствуют параболы, эллипсы и гиперболы. Второе уравнение задает одну точку, третье – пару прямых, и четвертое – прямую.

$\square$

Билет 18.

Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида*

$$\dot{x} = v(x,t) \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, точка обозначает дифференцирование по t.

Определение. *Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $\varphi(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$, такая, что $\forall t \in (a,b)$, $\frac{d\varphi}{dt}\big|_t = v(\varphi(t),t)$.*

Определение. *Решение называется удовлетворяющим начальному условию $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in (a,b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если $\varphi(t_0) = x_0$.*

Сначала докажем один вспомогательный факт.

Определение. *Отображение $A : M \to M$ метрического пространства M в себя называется сжимающим, если $\forall x, y \in M$ справедливо $\rho(Ax, Ay) \le q\rho(x,y)$ с некоторой константой $q < 1$.*

Теорема. (О сжимающих отображениях). *Сжимающее отображение A полного метрического пространства M в себя имеет единственную неподвижную точку (то есть такую, что $Ax = x$).*

Доказательство.

Фиксируем произвольное x_0 и построим последовательность x_n по правилу $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le q\rho(x_{n-1}, x_n) \le \dots \le q^n \rho(x_0, x_1)$$

в силу чего при $m > n$

$$\rho(x_n, x_m) = \sum_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \le \sum_{k=n}^{m-1} q^k \cdot \rho(x_0, x_1) \le q^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-q}$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, что означает фундаментальность последовательности x_n. Но тогда она имеет предел x. $Ax = A \lim A^n x_0 = \lim A^{n+1} x_0 = x$, то есть, x – искомая точка.

Если x и y – две неподвижные точки, то $\rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \le q\rho(x,y)$, откуда $\rho(x,y) = 0$, и $x = y$.

□

Теорема. (Существования и единственности). *Пусть функция $v(x,t)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности U точки (x_0, t_0). Тогда на некотором $(a,b) \ni t_0$ существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяюшее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.*

Доказательство.

Шаг 1: построение пространства. Обозначим $U' = \{(x,t) \,|\, |t - t_0| \le \alpha, |x - x_0| \le \beta\}$, α и β выбираются так, чтобы $U' \subset U$. Тогда на U' функции v и v_x (v_x здесь интерпретируется как линейный оператор: $v(x + \Delta x, t) = v(x,t) + v_x \Delta x + \overline{\overline{o}}(\Delta x)$) непрерывны. Поскольку U' компактно, определены $C = \max\limits_{U'} |v|$, $L = \max\limits_{U'} |v_x|$.

Пусть теперь $K = \{(x,t) \,|\, |t - t_0| \le \alpha', |x - x_0| \le C|t - t_0|\}$ – конус с вершиной (x_0, t_0), α' выбирается так, чтобы было выполнено $\alpha' \le \alpha$, $C\alpha' < \beta$, $L\alpha' < 1$. Тогда, в частности, $K \subset U'$.

Обозначим $\Delta = [t_0-\alpha', t_0+\alpha']$ и рассмотрим пространство непрерывных функций $C(\Delta)$ со стандартной "равномерной"метрикой. Оно полно. Пусть $M \subset C(\Delta)$ – множество функций, удовлетворяющих условию $h(t) \le C|t-t_0|$. Равномерный (и даже поточечный) предел функций, удовлетворяющих этому условию, снова будет удовлетворять этому условию. Значит, M замкнуто в $C(\Delta)$, а потому полно. Отметим, что M характеризуется условием $(x_0+h(t),t) \in K\ \forall t \in \Delta,\ h \in M$.

Шаг 2. Построение отображения. Построим отображение $A : C(\Delta) \to C(\Delta)$ по правилу

$$(Ah)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} v(x_0+h(t),t)dt$$

Отметим, что условие $h = Ah$ равносильно системе условий $h(t_0) = 0$ и $\dot h = v(x_0+h(t),t)$ (в частности, $\dot h$ определено как производная по вернему пределу интеграла от непрерывной функции). Отсюда легко видеть, что $\varphi(t)$ является решением уравнения (1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ тогда и только тогда, когда $h(t) = \varphi(t) - x_0$ удовлетворяет уравнению $Ah = h$.

Покажем, что, если $Ah = h$, то $h \in M$. Предположим, что найдется t, при котором $h(t) > C|t-t_0|$. Пусть $t_1 = \sup\{t \,|\, h(t) \le C|t-t_0|\}$. В силу непрерывности, $h(t_1) \le C|t-t_0| < \beta$. Но тогда для некоторого $\varepsilon > 0$, $h(t) < \beta$ при $t \in (t_1, t_1+\varepsilon)$. Тогда при $t \in (t_0, t_1+\varepsilon)$ справедливо $v(x_0+h(t),t) < C$, откуда при таких t справедливо $h(t) < C|t-t_0|$. Последнее противоречит определению t_1.

Итак, задача сводится к поиску решений уравнения $Ah = h$ в M.

Шаг 3. Завершение доказательства. Покажем, что отображение A переводит M в M. В самом деле, если $h \in M$, то при $t \in \Delta$ выполнено $h(t) \le C|t-t_0|$, в силу чего $(x_0+h(t),t) \in K \subset U'$. Но тогда подынтегральная функция не превосходит C, и $|(Ah)(t)| \le C|t-t_0|$, то есть, $Ah \in M$.

Теперь сделаем вспомогательную оценку. Пусть $(x,t),(y,t) \in K$ (t одинаково!), тогда, положив $r(s) = x+s(y-x)$, получим

$$||v(y,t)-v(x,t)|| = ||v(r(1),t)-v(r(0),t)|| = \left|\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}v(r(s),t)ds\right| \le$$

$$\le \left|\left|\frac{d}{ds}v(r(s),t)\right|\right| = ||v_x \cdot r_s|| \le L \cdot ||y-x||$$

Итак, $||v(y,t)-v(x,t)|| \le L||y-x||$. Отсюда следует, что для любых $h_1,h_2 \in M$, $||v(x_0+h_2(t),t)-v(x_0+h_1(t),t)|| \le L||h_2(t)-h_1(t)||$. Пользуясь этим, получаем

$$|(Ah_2-Ah_1)(t)| \le |t-t_0| \cdot ||v(x_0+h_2(t),t)-v(x_0+h_1(t),t)|| \le$$

$$\le |t-t_0| \cdot L||h_2-h_1|| \le \alpha' L||h_2-h_1||$$

Поскольку $L\alpha' < 1$ (по выбору α'), отображение A сжимающее на M. По теореме о сжимающих отображениях (используем полноту M), оно имеет в M единственную неподвижную точку, которая и дает единственное (с заданным начальным условием) решение (1).

$\square$

Билет 19.

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

Будем считать, что все функции рассматриваются на некотором промежутке $< a, b >$. Также, везде считаем, что они достаточно гладкие.

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, $a_i(x)$ – известные функции, коэффициенты уравнения.

Определение. *Уравнение (1) называется однородным, если $f(x) = 0$.*

Любому неоднородному уравнению естественным образом сопоставляется однородное с той же левой частью и нулевой правой.

Лемма. *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения неоднородного уравнения (1), то $y_1(x) - y_2(x)$ – решение соответствующего однородного. Если $y_1(x)$ – решение неоднородного уравнения, а $y_2(x)$ – соответствующего однородного, то $y_1(x) + y_2(x)$ – решение неоднородного. Наконец, если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения однородного уравнения, то $\forall \alpha, \beta$, $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ – снова решение однородного уравнения.*

Доказательство.

Все три утверждения тривиально проверяются подстановкой в (1), с учетом линейности (1) по $y(x)$.

□

Из первых двух утверждений леммы следует, что все решения неоднородного уравнения получаются прибавлением всех решений соответствующего однородного к любому частному решению неоднородного уравнения. Поэтому задача решения уравнения (1) разбивается в две: построение всех решений однородного уравнения и одного решения неоднородного.

Обозначим $z^i(x) = y^{(i)}(x)$. Тогда уравнение (1) равносильно системе первого порядка

$$\begin{cases} {z^0}'(x) & = & z^1(x) \\ \vdots & = & \vdots \\ {z^{n-2}}'(x) & = & z^{n-1}(x) \\ {z^{n-1}}'(x) & = & a_{n-1}(x)z^{n-1}(x) + \cdots + a_0(x)z^0(x) \end{cases}$$

Тогда, по общей теореме, в окрестности любой точки x_0 существует единственное решение для заданных начальных условий $y^{(i)}(x_0) = z^i(x_0)$.

Лемма. *Пусть на промежутке $< a, b >$ все функции $a_i(x)$ ограничены. Тогда для некоторого A имеет место оценка*

$$||z(x)|| \leq ||z(x_0)||e^{A|x-x_0|},$$

справедливая для любых x и x_0 из $< a, b >$.

Доказательство.

Если для некоторого x_0, $z(x_0) = 0$, то $z(x) = 0$ в окрестности x_0 по теореме единственности решения (данное решение совпадает в точке x_0 с нулевым). Тогда $z(x) = 0$ на любом отрезке, содержащем x_0, в силу компактности отрезка. Но тогда оно равно 0 всюду, и утверждение очевидно. Поэтому, пусть далее $z(x)$ не обращается в 0.

Пусть $x > x_0$, это предположение не ограничивает общности. Из ограниченности $a_i(x)$ следует, что существует такое A, что $||z'|| \leq A||z||$. Далее,

$$||z||' = \left(\sqrt{(z,z)}\right)' = \frac{2(z',z)}{2\sqrt{(z,z)}} \leq \frac{||z'||||z||}{||z||} = ||z'||$$

поэтому, $||z||' \leq A||z||$. Тогда $(\ln||z||)' = \frac{||z||'}{||z||} \leq A$, интегрируя от x_0 до x, получаем $\ln||z(x)|| - \ln||z(x_0)|| \leq A(x - x_0)$, откуда следует искомое неравенство.

$\square$

Рассмотрим пространство R^{n+1} с координатами $x, z^1, \ldots, z^n$, в нем точку $x_0, \bar{z}_0$, и множество $\{(x,\bar{z})|x \in [c,d], ||z|| \leq ||z_0||(1 + e^{A(x-x_0)})\}$. Это множество компактно в R^{n+1}, поэтому, решение с начальным условием $x_0, \bar{z}_0$ продолжается до его границы. В то же время, оно не может выйти на границу $||z|| = ||z_0||(1 + e^{A(x-x_0)}$ по лемме. Значит, оно продолжается по x на весь отрезок $[c,d]$, и это верно для любого $[c,d] \subset < a, b >$. Поэтому, решение определено на всем $< a, b >$. Итак, доказана теорема

Теорема. *Для любой точки $x_0 \in < a, b >$, любых начальных условий $y(x_0) = y_0^0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, существует единственное решение уравнения (1) с этими начальными условиями, определенное на всем $< a, b >$.*

Определение. *Функции $y_1(x), \ldots, y_p(x)$ называются линейно независимыми, если из $c_1y_1(x) + \cdots + c_py_p(x) = 0$ следует $c_1 = 0, \ldots, c_p = 0$.*

Определение. *Определителем Вронского системы функций $y_1(x), \ldots, y_p(x)$ называется функция, вычисляемая в каждой точке x как определитель*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_p(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_p'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(p-1)} & \ldots & y_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

Предложение. *Если функции $y_1(x), \ldots, y_p(x)$ линейно зависимы в некоторой окрестности точки x_0, то их определитель Вронского в точке x_0 равен 0.*

Доказательство.

Запишем $c_1y_1(x) + \cdots + c_py_p(x) = 0$, продифференцируем k раз по x, и подставим x_0. Тогда $\forall k$, $c_1y_1^{(k)}(x_0) + \cdots + c_py_p^{(k)}(x_0) = 0$, то есть столбцы определителя Вронского линейно зависимы, в силу чего он равен 0.

$\square$

Теорема. *Уравнение (1) имеет не менее n линейно независимых решений.*

Доказательство.

Выберем в R^n n линейно независмых векторов, $v_1, \dots, v_n$, $v_i = (v_i^0, \dots, v_i^{n-1})$. Фиксируем точку x_0. Согласно теореме о существовании решения, для каждого $i = 1, \dots, n$ существует решение $y_i(x)$ с начальными условиями $y_i^{(j)}(x_0) = v_i^j$, $j = 0, \dots, n-1$. Столбцами определителя Вронского системы функций $y_i(x)$ в точке x_0 будут вектора v_i, которые линейно независимы. Значит, $W(x_0) \neq 0$, и функции $y_i(x)$ линейно независимы.

$\square$

Лемма. *Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения (1). Тогда в любой точке x_0 их определитель Вронского отличен от 0.*

Доказательство.

Предположим, существует x_0, $W(x_0)$ равен 0. Тогда в точке x_0 столбцы определителя линейно зависимы. Пусть $c_1 y_1^{(k)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Тогда для функции $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ справедливо $y^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Однако, 0 есть решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее тем же условиям, что проверяется подстановкой. По теореме единственности решения с заданными начальными условиями, $y(x) = 0$. То есть, $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$, и функции линейно зависимы.

$\square$

Теорема. *Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимые решения однородного уравнения (1), существующие по первой теореме. Тогда они образуют базис в пространстве решений однородного уравнения.*

Доказательство.

Достаточно доказать, что любое другое решение представляется в виде их линейной комбинации. Пусть $y(x)$ – произвольное решение (1), фиксируем произвольную точку x_0. Рассмотрим линейную систему $c_1 y_1^{(k)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0)$. Определителем этой системы является определитель Вронского, который отличен от 0. Значит, она имеет решение $c_1, \dots, c_n$. Обозначим $z(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, тогда $z^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0)$ для всех $k = 0, \dots, n-1$. По теореме о единственности решения, $y(x) = z(x)$. Иначе говоря, $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$.

$\square$

Определение. *Такая система векторов называется фундаментальной системой решений однородного уравнения (1).*

Замечание. *Ясно, что пространство решений линейного однородного уравнения n-мерно.*

Далее, любое решение однородного уравнения имеет вид

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Определение. *Это n-парметрическое семейство решений называется общим решением однородного уравнения (1).*

Общее решение неоднородного уравнения получается прибавлением любого решения неоднородного уравнения к общему решению соответствующего однородного уравнения.

Обсудим в заключение построение какого-либо одного решения уравнения (1) (называемого частного решением). Описываемый метод называется методом вариации постоянных.

Будем искать решение в виде $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – некоторая фундаментальная система решений. Потребуем, чтобы

$$c_1'(x)y_1^{(k)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(k)}(x) = 0 \tag{2}$$

для всех $k = 0, \dots, n-2$. Тогда последовательно показывается, что, для всех $k = 0, \dots, n-2$,

$$y^{(k)} = c_1(x)y_1^{(k)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(k)}(x)$$

и

$$y^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) +$$
$$+ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

Подставив это в уравнение (1), находим

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)}(x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\left(y_i^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y_i^{(k)}(x)\right) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i^{(n-1)}(x)$$

Поскольку $y_i(x)$ – решения однородного уравнения (1), первая сумма равна 0. Значит, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) & + & \dots & + & c_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & \dots & + & c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & \dots & + & c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x) \end{cases}$$

Определителем этой системы в каждой точке x является определитель Вронского, отличный от 0. Значит, в каждой точке линейными преобразованиями ее можно привести к системе

$$\begin{cases} c_1'(x) & = & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n-1}'(x) & = & f_{n-1}(x) \end{cases}$$

Из этой системы $c_i(x)$ находятся с точностью до аддитивных констант. Нетрудно видеть, что этои константы определяют добавление общего решения однородного уравнения.

Наконец, вычислим $W'(x)$ – производную определителя Вронского фундаментальной системы решений однородного уравнения (1). Производная определителя может быть вычислена как сумма определителей матриц, которые получаются из исходной дифференцированием одной строки (это следует из определения определителя и правила дифференцирования произведения). Однако, дифференцирование в определителе Вронского любой строки, кроме последней, приводит к определителю с двумя одинаковыми строками, который равен 0. Поэтому,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$$

поскольку $y_i(x)$ – решения (1), далее

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(i)} & \dots & y_n^{(i)} \end{vmatrix} =$$

опять, определитель с двумя одинаковыми строками равен 0, поэтому

$$= -a_{n-1}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -a_{n-1}(x)W(x)$$

Итак, имеет место $W'(x) = -a_{n-1}(x)W(x)$. Решая это уравнение, получаем

Теорема. (Формула Лиувилля-Остроградского).

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt}$$

Билет 20.

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное

Определение. *Линейным уравнением с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \tag{1}$$

где $a_i \in R$, $y = y(x)$ – неизвестная функция, $f(x)$ – заданная правая часть. Если она равна 0, уравнение называется однородным.

Следующая лемма содержит необходимые нам факты из общей теории линейных дифференциальных уравнений.

Лемма. (1). *Общее решение неоднородного уравнения (1) есть сумма любого частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения; все решения однородного уравнения образуют линейное пространство размерности n.*

Обозначим D – оператор дифференцирования, $Dy = y'$, I – тождественный оператор.

Рассмотрим дифференциальный оператор L:

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I$$

Тогда уравнение (1) принимает вид $Ly = f(x)$.

Рассмотрим также многочлен $P(t)$

$$P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

Тогда $L = P(D)$.

С другой стороны, многочлен P может быть разложен над C на множители

$$P(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_p)^{k_p}$$

Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ определяются как корни (алгебраического) уравнения $P(t) = 0$, которое называется характеристическим. $k_1, \dots, k_p$ находятся как кратности корней. Отметим, что решение характеристического уравнения есть первый шаг решения уравнения (1).

В силу изложенного,

$$L = P(D) = (D - \lambda_1 I)^{k_1} \cdots (D - \lambda_p I)^{k_p}$$

Рассмотрим функцию $y = f_{s,\mu}(x) = x^s e^{\mu x}$, s – натуральное или 0, $\mu \in C$. Рассмотрим действие на нее оператора $D_\lambda = (D - \lambda I)$:

$$(D - \lambda I)(x^s e^{\mu x}) = s x^{s-1} e^{\mu x} + x^s \mu e^{\mu x} - \lambda x^s e^{\mu x} = s x^{s-1} e^{\mu x} + x^s e^{\mu x}(\mu - \lambda)$$

Эта формула позволяет сделать важный вывод: если $\mu = \lambda$, то при $s > 0$ $f_{s,\mu}$ переходит в $f_{(s-1),\mu}$ с ненулевым коээфициентом, а $f_{0,\mu}$ переходит в 0. Если же $\mu \neq \lambda$, $f_{s,\mu}$ переходит в себя (с ненулевым коэффициентом), плюс некоторая линейная комбинация $f_{r,\mu}$, $r < s$.

Обозначим $P_{r,\mu}$ – линейная оболочка $f_{s,\mu}$ при $s \leq r$. Иначе говоря, элементы $P_{r,\mu}$ имеют вид $q(x)e^{\mu x}$, $q(x)$ – многочлен степени не выше r. Из изложенного следует, что

$$D_\lambda P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu} & \text{при } \mu \neq \lambda \\ P_{r-1,\mu} & \text{при } \mu = \lambda,\ r > 0 \\ 0 & \text{при } \mu = \lambda,\ r = 0 \end{cases}$$

Отсюда по индукции без труда доказывается, что

$$D_\lambda^k P_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu} & \text{при } \mu \neq \lambda \\ P_{r-k,\mu} & \text{при } \mu = \lambda,\ r \geq k \\ 0 & \text{при } \mu = \lambda,\ r < k \end{cases}$$

Отсюда получается следующая формула для действия оператора $L = D_{\lambda_1}^{k_1} \cdots D_{\lambda_p}^{k_p}$:

Лемма. (2).

$$LP_{r,\mu} = \begin{cases} P_{r,\mu} & \textit{если } \mu \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \\ P_{r-k_i,\mu} & \textit{при } \mu = \lambda_i,\ r \geq k_i \\ 0 & \textit{при } \mu = \lambda_i,\ r < k_i \end{cases}$$

Предложение. *Фукнции $f_{j,\mu}$ при различных j, μ линейно независимы.*

Доказательство.

Предположим, что они линейно зависимы. Сгруппируем слагаемые с одинаковыми μ:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i} c_{i,j} f_{j,\mu_i} = 0$$

Не ограничивая общности, предположим, что все $c_{i,k_i} \neq 0$. Тогда будем действовать индукцией по p.

При $p = 1$ имеем сумму $\sum_{j=0}^{k} c_j f_{j,\mu} = 0$, $c_k \neq 0$. Подействуем на него оператором D_μ^k, по лемме получится $cf_{0,\mu} = ce^{\mu x}$, $c \neq 0$. С другой стороны, поскольку прообраз был равен 0, образ тоже равен 0, то есть $ce^{\mu x} = 0$, что неверно.

Пусть теперь $p > 1$, тогда подействуем оператором $D_{\mu_p}^{k_p+1}$. Тогда все f_{j,μ_p} переходят в 0, а f_{j,μ_i} при $i < p$ переходят в себя плюс слагаемые с меньшими j. Остюда, получится

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{k_i} d_{i,j} f_{j,\mu_i} = 0$$

где $d_{i,k_i} \neq 0$. Это невозможно по предположению индукции.

□

Далее, из леммы 2 следует, что пространства P_{k_i-1,λ_i} для всех $i = 1, \ldots, p$ переводятся в 0 оператором L. Поэтому, все элементы пространства

$$P_L = P_{k_1-1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus P_{k_p-1,\lambda_p}$$

будут переводится оператором L в 0. Иначе говоря, они будут решениями уравнения $Ly = 0$, то есть, однородного уравнения (1). Итак, P_L – подпространство в пространстве решений однородного уравнения (1), $P_L \subset V$.

С другой стороны, $\dim P_L = k_1 + \dots + k_p = n$, поскольку это есть сумма кратностей корней характеристического уравнения, которое имеет степень n. Однако, $\dim V = n$ (Лемма 1). Итак, $\dim P_L = \dim V$, поэтому $P_L = V$.

Вспоминая построение P_L, любой элемент P_L есть линейная комбинация элементов P_{k_i-1,λ_i}, а последние есть линейные комбинации f_{s,λ_i} при $s < k_i$. Итак, справедлива следующая теорема

Теорема. *Решения однородного уравнения (1) имеют вид*

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f_{j,\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} x^j e^{\lambda_i x}$$

Получаем n – параметрическое семейство решений уравнения (1) (параметрами являются c_{ij}).

Определение. *Это семейство решений называется общим решением однородного уравнения (1).*

По предыдущей теореме, общее решение выписывается явно для любого уравнения после решения соответствующего характеристического уравнения.

Отметим, что функции f_{s,λ_i} при $s < k_i$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Перейдем к решению неоднородного уравнения. Согласно лемме 1, достаточно найти одно частное решение неоднородного уравнения. Если правая часть $f(x)$ произвольна, можно использовать метод вариации постоянных, применимый к любому линейному уравнению (см. билет 19). Однако, в случае правой части конкретного вида, решение можно упростить.

Замечание. *Если правая часть уравнения $f(x)$ представима как $f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_r f_r(x)$, и для $f_i(x)$ найдены частные решения $y_i(x)$, $Ly_i(x) = f_i(x)$, то для $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_r y_r(x)$ справедливо $Ly(x) = f(x)$ в силу линейности L (Лемма 1). То есть, $y(x)$ – частное решение уравнения (1).*

Далее будет описано нахождение частного решения при $f(x) = q(x)e^{\mu x}$ для некоторого $\mu \in C$ и некоторого многочлена $q(x)$. Пользуясь замечанием, можно находить частные решения в случае, когда правая часть есть линейная комбинация функций такого вида.

Теорема. *Рассмотрим уравнение (1), $f(x) = q(x)e^{\mu x}$. Обозначим $s = \deg q$. Положим $k = s$, если μ не совпадает ни с одним из λ_i, иначе $k = s + k_i$ если $\mu = \lambda_i$. Тогда уравнение (1) имеет решение в пространстве $P_{k,\mu}$.*

Доказательство.

Согласно лемме 2, при таком выборе k окажется $LP_{k,\mu} = P_{s,\mu}$. Поэтому, существует $y \in P_{k,\mu}$, $Ly = q(x)e^{\mu x} \in P_{s,\mu}$.

□

Итак, доказано существование решения в пространстве $P_{k,\mu}$. Иначе говоря, уравнение (1) имеет решение вида

$$\sum_{i=0}^{k} c_i x^i e^{\mu x}$$

Коэффициенты c_i можно находить методом неопределенных коэффициентов.

После нахождения частного решения, общее решение неоднородного уравнения получается, согласно лемме 1, как сумма данного частного решения и общего решения неоднородного уравнения.

Итак, изложена методика построения общего решения однородного уравнения вида (1) и неоднородного уравнения вида (1) с правой частью определенного вида.

Псокольку все a_i в уравнении (1) вещественны, комплексные корни характеристического уравнения будут попарно сопряженными. В силу этого, в P_L войдут пары слагаемых

$$P_{k,a+bi} \oplus P_{k,a-bi}$$

Базисом в данном пространстве, по построению, являются $x^s e^{(a\pm bi)x}$, $s \leq k$. Тогда, вместо них, в качестве базиса можно взять $x^s e^{ax} \cos bx$ и $x^s e^{ax} \sin bx$. Это следует из того, что $e^{(a\pm bi)x} = e^{ax} e^{\pm bix}$, после чего $2\cos bx = e^{bix} + e^{-bix}$, $2i \sin bx = e^{bix} - e^{-bix}$ – невырожденное линейное преобразование. Этот базис удобен тем, что состоит из вещественных на R функций, и потому возможно избежать действий с комплексными числами при поиске конкретных решений для задачи Коши.

Тем же методом можно пользоваться и при поиске решений для неоднородного уравнения. Пусть правая часть имеет вид $q(x)e^{ax}\cos bx$ или $q(x)e^{ax}\sin bx$, $q(x)$ – многчлен степени s. Тогда ее можно представить как линейную комбинацию функций из $P_{s,a+bi}$ и $P_{s,a-bi}$. Определив k по последней теореме, получаем из нее, что существует частное решение в $P_{k,a+bi} \oplus P_{k,a-bi}$. Опять заменив базис, можем искать его как линейную комбинацию функций $x^r e^{ax} \cos bx$ и $x^r e^{ax} \sin bx$, $r \leq k$. Отметим, однако, что, если в правой части был только синус или только косинус, решение все равно следует искать в базисе из обеих функций.

Билет 21.

Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Напомним основные понятия, связанные с комплексными числами.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^2$, и введем на нем умножение $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Получится поле, которое называется полем комплексных чисел и обозначается $\mathbb{C}$. При этом, числа вида $(x, 0)$ образуют подполе, изоморфное $\mathbb{R}$, поэтому обозначаются просто x. Обозначив число $(0, 1)$ через i, получим для произвольного числа форму $(x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi$. i обладает свойством $i^2 = -1$. Далее, на $\mathbb{C}$ вводится естественная топология $\mathbb{R}^2$. При этом, последовательность $x_n + iy_n$ сходится к $x + iy$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Далее, длина вектора (x, y) называется модулем комплексного числа $|x+iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол между вектором (x, y) и осью абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки, называется аргументом этого числа, $\arg(x + iy)$. При перемножении чисел модули перемножаются, а аргументы складываются. Отметим еще, что аргумент определен с точностью до 2π. Наконец, сопряженным к числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = x - iy$.

Определение. *Отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется функцией комплексного переменного.*

Определение. *Если для некоторого z_0 существует предел*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

то он называется производной функции $f(z)$ в точке z_0, а функция называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой (аналитической, голоморфной) в этой точке.

Пусть f – функция комплексного переменного. С ней естественно связывается отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Обозначим его компоненты следующим образом: $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Соответственно, $f(z) = u(x + iy) + iv(x + iy)$.

Далее будут рассматриваться приращения аргумента $\mathrm{dz} = (\mathrm{dx}, \mathrm{dy})$. Функция f будет называться $\overline{\overline{o}}(1)$, если она стремится к 0 при $\mathrm{dz} \to 0$, и $\overline{\overline{o}}(\mathrm{dz})$, если $f/|dz|$ стремится к 0 при $\mathrm{dz} \to 0$. Отметим, что условия $f/|dz| \to 0$ и $f/dz \to 0$ эквивалентны ($\big|dz/|dz|\big| = 1$). Кроме того, $\overline{\overline{o}}(1) \cdot dz = \overline{\overline{o}}(dz)$, $\overline{\overline{o}}(dz)/dz = \overline{\overline{o}}(1)$.

Пусть отображение F дифференцируемо в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ (тогда функция f называется $\mathbb{R}$-дифференцируемой). Это означает, что

$$F(z_0 + \mathrm{dz}) = F(x_0 + \mathrm{dx}, y_0 + \mathrm{dy}) =$$

$$= F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dx} \\ \mathrm{dy} \end{pmatrix} + \overline{\overline{o}}(\mathrm{dz}) =$$

$$= F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \mathrm{dx} + \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} \mathrm{dy} + \overline{\overline{o}}(\mathrm{dz})$$

Обозначив $f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$, получим

$$f(z_0 + dz) = f(z_0) + f_x\mathrm{dx} + f_y\mathrm{dy} + \overline{\overline{o}}(\mathrm{dz}) =$$

$$= f(z_0) + \frac{1}{2}(f_x - if_y)(\mathrm{dx} + i\mathrm{dy}) + \frac{1}{2}(f_x + if_y)(\mathrm{dx} - i\mathrm{dy}) + \overline{\overline{o}}(\mathrm{dz}) =$$

$$= f(z_0) + f_z \mathrm{dz} + f_{\bar z} \mathrm{d\bar z} + \bar{\bar{o}}(\mathrm{dz})$$

где $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$.

Определение. *Условие $f_{\bar z} = 0$ называется условием Коши-Римана*

Замечание. *В терминах функций u и v оно записвается так:*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Теорема. *$f'(z_0)$ существует тогда и только тогда, когда $f(z)$ является $\mathbb{R}$-дифференцируемой в точке z_0, и удовлетворяет в этой точке условиям Коши-Римана. В случае существования, $f'(z_0) = f_z(z_0)$.*

Доказательство.

Достаточность. Если $f_{\bar z} = 0$, то легко видеть, что

$$\frac{f(z_0 + \mathrm{dz}) - f(z_0)}{\mathrm{dz}} = f_z + \bar{\bar{o}}(1)$$

То есть, существует

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_z$$

Необходимость. Пусть существует указанный предел. Тогда

$$\frac{f(z_0 + \mathrm{dz}) - f(z_0)}{\mathrm{dz}} = f'(z_0) + \bar{\bar{o}}(1)$$

$$f(z_0 + \mathrm{dz}) - f(z_0) = f'(z_0)\mathrm{dz} + \bar{\bar{o}}(\mathrm{dz})$$

С другой стороны, $\mathbb{R}$-дифференцируемость эвивалентна представимости приращения функции в виде

$$f(z_0 + \mathrm{dz}) - f(z_0) = f_z \mathrm{dz} + f_{\bar z} \mathrm{d\bar z} + \bar{\bar{o}}(\mathrm{dz})$$

(Если такое представление построено, то находятся $f_x = f_z + f_{\bar z}$ и $f_y = (f_{\bar z} - f_z)/i$).

Итак, из $\mathbb{C}$-дифференцируемости следует $\mathbb{R}$-дифференируемость, причем выполнены условия Коши-Римана $f_{\bar z} = 0$.

□

Определение. *Отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется конформным в точке z_0, если оно дифференцируемо в этой точке, и его дифференциал представляется в виде композиции поворота и гомотетии с отличным от 0 коэффициентом.*

Легко видеть, что в этом случае его матрица имеет вид

$$J = k \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\varphi & -k\sin\varphi \\ k\sin\varphi & k\cos\varphi \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

и представляется в таком виде тогда и только тогда, когда $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, то есть, когда соответствующая функция комплексного переменного f удовлетворяет условиям Коши-Римана в точке z_0, что эквивалентно ее $\mathbb{C}$-дифференцируемости в этой точке. Условие $k \neq 0$ при этом эквивалентно $f'(z_0) \neq 0$. Итак, доказана

Теорема. *Отображение F конформно в точке z_0 тогда и только тогда, когда f голоморфна в точке z_0, и $f'(z_0) \neq 0$.*

Далее, из $f_{\bar{z}} = 0$ следует, что $if_y = -f_x$, откуда $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(f_x + f_x) = f_x = u_x + iv_x$.

С другой стороны, коэффициент k и угол φ находятся из условий

$$u_x = k\cos\varphi, \quad v_x = k\sin\varphi$$

то есть, как длина и полярный угол вектора (u_x, v_x), но этот вектор и есть вектор $f_z = f'(z_0)$. Вспоминая определения модуля и аргумента, получаем

$$k = |f'(z_0)|, \quad \varphi = \arg f'(z_0)$$

Билет 22.

Элементарные функции комплексного переменного. Условие Коши – Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Пусть f — $\mathbb{C}$ - значная функция, $\mathbb{R}$ - дифференцируемая на $\mathbb{C}$, то есть $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{z}$.

Определение. *Отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется конформным в точке z_0, если ее дифференциал $df(z_0)$ задает невырожденное линейное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, сводящееся к повороту с растяжением.*

Замечание. *Отображение f является конформным в точке $z_0 \Leftrightarrow f$ — $\mathbb{C}$ - дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.*

Замечание. *Конформность в точке ∞ означает конформность $g(z) = f(\frac{1}{z})$ в точке 0.*

Пусть $f(z_0) = \infty$.

Определение. *Если $z_0 \neq \infty$, то конформность в точке z_0 означает конформность $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ в точке z_0.*

Если $z_0 = \infty$, то конформность в точке ∞ означает конформность $F(z) = \frac{1}{f(1/z)}$ в точке 0.

Свойства конформных отображений

1^0 *(круговое свойство). Конформное отображение переводит малые окрестности в гладкие кривые, в первом порядке совпадающие с окружностями.*

2^0 *(угловое свойство). Конформное отображение сохраняет углы между дугами и ориентацию.*

Определение. *Дробно - линейным отображением называется отображение вида $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}: \ ad - bc \neq 0$.*

Замечание.

1^0 *Условие $ad - bc \neq 0$ гарантирует непостоянство $w(z)$*

2^0 *При $c = 0 \quad w(z) = Az + B$ сводится к растяжению с поворотом + сдвиг.*

Доопределим отображение $w(z)$ по непрерывности в точке $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$, полагая $w(-\frac{d}{c}) = \infty$, $w(\infty) = \frac{a}{c}$ (при $c = 0 \quad w(\infty) = \infty$.)

Теорема. *Любое дробно - линейное отображение задает конформное гомеоморфное (взаимно - однозначное и непрерывное) отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство.

1) Взаимная однозначность. $c = 0$ — очевидно. Пусть $c \neq 0$. Если $z \neq -\frac{d}{c}$ и $z \neq \infty$, то существует дробно - линейное отображение $z(w) = \dfrac{dw - b}{-cw + a}$, которое не принимает значения $z(w) = \frac{a}{c}, \infty$. Полагаем $z(\frac{a}{c}) = \infty$ и $z(\infty) = -\frac{d}{c}$.

2) Непрерывность. При $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ непрерывность следует из формулы $z(w)$, а в точках $z = -\frac{d}{c}, \infty$ легко напрямую проверяется.

3) Конформность. При $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ отображение голоморфное (то есть $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0$), а его производная равна $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \ \Rightarrow$ конформно ($\mathbb{C}$ - дифференцируемо и $w' \neq 0$). Конформность в точке $z = -\frac{d}{c}$: надо проверить конформность отображения $W(z) = \dfrac{1}{w} = \dfrac{cz+d}{az+b}$ в точке $z = -\frac{d}{c}$.

$$\left.\frac{dW(z)}{dz}\right|_{z=-\frac{d}{c}}=\left.\frac{bc-ad}{(az+b)^2}\right|_{z=-\frac{d}{c}}\neq 0.$$

Конформность в точке $z=\infty$: для этого надо проверить конформность в точке 0 отображения $Z(z)=\dfrac{a+bz}{c+dz}$. $\left.\dfrac{dZ(z)}{dz}\right|_{z=0}=\left.\dfrac{bc-ad}{(c+dz)^2}\right|_{z=0}\neq 0.$

$\square$

Утверждение. *Дробно - линейные отображения $\overline{\mathbb{C}}$ составляют группу относительно операции композиция.*

Доказательство.

По предыдущей теореме обратное отображение принадлежит группе, в качестве единицы берем тождественное преобразование.

$\square$

Замечание.

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Дробно - линейные}\\ \textit{отображения}\,\overline{\mathbb{C}}\end{array}\right\}\quad\overset{\textit{изоморфизм}}{\longleftrightarrow}\quad\left\{SL_2(\mathbb{C})-\begin{array}{c}\textit{группа комплексных}\\ \textit{матриц}\ 2\times 2\ \textit{с}\ det=1.\end{array}\right\}$$

Определение. *Обобщенной окружностью на $\mathbb{C}$ (или окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$) называется образ окружности на сфере Римана при стереографической проекции. Таким образом, обобщенная окружность — это либо окружность, либо прямая.*

Утверждение. *Любое дробно - линейное отображение переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.*

Доказательство.

Пусть $w(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\implies$ оно представляется в виде $w(z)=A+\dfrac{B}{z+C}$, где $A,B,C\in\mathbb{C}$:

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}\left(\frac{z+d/c}{z+d/c}-\frac{d/c-b/a}{z+d/c}\right)=\frac{a}{c}-\frac{ad/c-b}{cz+d},$$

то есть дробно - линейное отображение есть композиция сдвига, растяжения и отображения $z\mapsto 1/z$. Надо лишь проверить, что $z\mapsto 1/z$ переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность. Обобщенная окружность на $\mathbb{C}$ задается уравнением вида $A(x^2+y^2)+B_1x+B_2y+C=0$, где A,B_1,B_2,C не равны 0 одновременно, но при $A\neq 0$ — это окружность на $\mathbb{C}$ или точка $(B_1=B_2=C=0)$, а при $A=0$ — это прямая на $\mathbb{C}$ или пустое множество $(B_1=B_2=0,\ C\neq 0)$. В комплексных координатах: $Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\overline{z}+C=0$, где $z=x+iy,\ B=\frac{B_1-iB_2}{2},\ \overline{B}=\frac{B_1+iB_2}{2}$. При $z\mapsto w=\dfrac{1}{z}\quad A+B\overline{w}+\overline{B}w+Cw\overline{w}=0.$ Поскольку $w(z)$ осуществляет гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, то обобщенная окружность не может перейти в точку или $\emptyset$.

$\square$

Определение. *Точки z и z^* называются симметричными относительно окружности $\Gamma=\{|z-z_0|=R\}$, если они лежат на одном луче, проходящем через z_0 и $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|=R^2$.*

Замечание. *Эквивалентное определение (из теоремы планиметрии). Точки z^* и z симметричны относительно $\Gamma\Leftrightarrow$ любая окружность, проходящая через z и z^*, ортогональна Γ.*

Свойства симметрии

1. $z^* - z_0 = |z^* - z_0|\, e^{i\arg(z^*-z_0)} = \dfrac{R^2}{|z-z_0|\, e^{-i\arg(z-z_0)}} \quad\Longrightarrow\quad z^* - z_0 = \dfrac{R^2}{\overline{z-z_0}}.$

2. Геометрическое построение: восстанавливаем перпендикуляр в z к лучу $z_0 z$ и касательную к окружности в той точке, где он пересекает окружность. Точка пересечения касательной и луча $z_0 z$ является точкой z^*.

3. Если $z_0 \to \infty$, то есть Γ совпадает с прямой, преобразование симметрии относительно Γ совпадает с отражением.

Утверждение. *Любое дробно - линейное отображение $w(z)$ переводит точки z и z^*, симметричные относительно обобщенной окружности Γ, в точки w и w^*, симметричные относительно обобщенной окружности $w(\Gamma)$.*

Доказательство.

Любая окружность, проходящая через z и z^* и ортогональная Γ, переводится $w(z)$ в окружность, проходящую через w и w^* и ортогональную $w(\Gamma)$.

$\square$

Утверждение. *(свойство трех точек). Пусть $\Lambda:\ w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0$. Для любых заданных различных трех точек $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ существует единственное дробно - линейное преобразование $\Lambda:\ \Lambda(z_i) = w_i,\ i = 1,2,3$.*

Доказательство.

Допустим, $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$ и $w_1, w_2, w_3 \neq \infty$. Тогда дробно - линейное отображение $\Lambda_1 : w_1(z) = \dfrac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки $0, \infty, 1$. Аналогично, $\Lambda_2 :\ w_2(z) = \dfrac{z-w_1}{z-w_2} \cdot \dfrac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$ переводит точки w_1, w_2, w_3 в точки $0, \infty, 1$. Следовательно, дробно - линейное отображение $\Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1$: $(z_1, z_2, z_3) \to (w_1, w_2, w_3)$.

<u>Единственность.</u> Пусть Λ — дробно - линейное преобразование.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda: \ (z_1, z_2, z_3) & \mapsto & (w_1, w_2, w_3) \\ \uparrow \Lambda^{-1} & & \downarrow \Lambda_2 \\ (0, \infty, 1) & \mapsto & (0, \infty, 1) \end{array} \qquad \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ дробно - линейное отображение $\lambda := \Lambda_2 \circ \Lambda \circ \Lambda_1^{-1} : (0, \infty, 1) \mapsto (0, \infty, 1)$. $\lambda(\infty) = \infty \ \Rightarrow\ \lambda$ — линейное отображение, то есть $\lambda = az + b$. $\lambda(0) = 0 \ \Rightarrow\ b = 0;\ \lambda(1) = 1 \ \Rightarrow\ a = 1$, то есть $\lambda(z) \equiv z \Rightarrow \Lambda = \Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1$, то есть оно определяется единственным образом.

$\square$

Следствие. *Любые два обобщенных круга B и B^* на $\overline{\mathbb{C}}$ дробно - линейно изоморфны.*

Доказательство.

Пусть обобщенные окружности Γ и Γ^* — границы B и B^* соответственно. Выберем на Γ и Γ^* по три различных точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3. Если при движении $z_1 \to z_2 \to z_3$ и $w_1 \to w_2 \to w_3$ область остается слева (естественная ориентация), то при $\Lambda:\ B \to B^*$.

(Если попали не туда, то применим преобразование $\widetilde{z} - z_0 = \dfrac{R^2}{z-z_0}$).

$\square$

<u>Дробно - линейные изоморфизмы стандартных областей.</u>

1^0. *Группа дробно - линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$ совпадает с группой всех дробно - линейных отображений.*

2^0. *Группа дробно - линейных автоморфизмов* $\mathbb{C}$ *совпадает с подгруппой всех дробно - линейных отображений.*

3^0. *Все дробно - линейные автоморфизмы единичного круга* Δ *имеют вид* $w(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, *где* $\theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1$.

Доказательство.

Пусть точка $a \in \Delta$ переходит в 0 при автоморфизме w. Тогда симметричная $a^* = \frac{1}{\overline{a}}$ переходит при w в ∞. $\Rightarrow$ $w(z) = \lambda\dfrac{z-a}{z-1/\overline{a}} = \lambda'\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $\lambda' \in \mathbb{C}$. Но $|w(1)| = 1$, так как единичная окружность сохраняется при w $\Rightarrow$ $|\lambda'| = 1$, то есть $\lambda' = e^{i\theta}$ $w(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

С другой стороны, любое такое отображение является автоморфизмом Δ.

$\square$

4^0. *Все дробно - линейные автоморфизмы верхней полуплоскости* H *имеют вид* $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, *где* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *и* $ad - bc > 0$.

Доказательство.

Дробно - линейный автоморфизм $w: H \to H$ переводит вещественную прямую гомеоморфно в вещественную прямую $\Rightarrow$ существуют точки x_1, x_2, x_3, которые переходят при w в точки $0, 1, \infty$ $\Rightarrow$ $w(z) = \dfrac{z-x_1}{z-x_3}\cdot\dfrac{x_2-x_3}{x_2-x_1} = \dfrac{az+b}{cz+d}$ с вещественными a, b, c, d. Так как $w(i) > 0$ $\Rightarrow$ $w(i) = \dfrac{ad-bc}{c^2+d^2} > 0$.

$\square$

Примеры элементарных функций.

1) $w = z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, где n — натуральное. $\dfrac{dw}{dz} = nz^{n-1}$ при $n > 1$, $\dfrac{dw}{dz} = 0$ $\Leftrightarrow$ $z = 0$ $\Rightarrow$ при $n > 1$ $w(z)$ конформно в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Переходим к полярным координатам: $z = r\,e^{i\theta},\ w = \rho\,e^{i\psi} = (r^n)\,e^{i(n\theta)}$ $\Rightarrow$ это отображение $w(z)$ увеличивает в n раз углы с вершиной $z = 0$. Отсюда же — любые две точки $z_1 = r\,e^{i\theta}$ и $z_2 = r\,e^{i\theta+\frac{2\pi}{n}}$ при отображении $w(z)$ "склеиваются"в одну точку w. $\Rightarrow$ При $n > 1$ $w(z)$ неоднолистно в $\mathbb{C}$.

Во избежание этого рассмотрим $D = \{0 < \arg w < 2\pi\}$.

2) Определим $w(z) = e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$. Докажем существование этого предела, если $z = x + iy$.

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\,\mathrm{arctg}\,\frac{y/n}{1+x/n}$$

(так как при $n \to \infty$ $1 + \frac{z}{n}$ лежит в правой полуплоскости, то берем значение $\arg(1+\frac{z}{n})$ и arctg из $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right| = e^x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = y$. $\Rightarrow$ Предел существует и $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, таким образом, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}$, $\arg e^z = \mathrm{Im}\,z$.

1^0. Функция $e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Полагая $e^z = u + iv$, имеем $u = e^x\cos y,\ v = e^x\sin y$ $\Rightarrow$ u, v дифференцируемы в $\mathbb{C}$ и всюду в $\mathbb{C}$ выполнены условия Коши - Римана.

2^0. $(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y + ie^x\sin y) = e^z$. Так как $|e^z| = e^x > 0$, то $(e^z)' \neq 0$ и $w(z)$ конформно в каждой точке $\mathbb{C}$.

3^0. e^z периодична с периодом $T = 2\pi i$. Для однолистности $w = e^z$ в D необходимо и достаточно, чтобы D не содержало ни одной пары точек $z_1, z_2 :\ z_1 - z_2 = 2n\pi i,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Например, $D = \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$. Полагая $z = x + iy$, получаем $w = e^x e^{iy}$. Тогда прямые $\{y = y_0\} \mapsto$ лучи $\{\psi = y_0\}$ в полярных координатах, а отрезки $\{x = x_0, 0 < y < 2\pi\} \mapsto$ в окружности с выколотыми точками $\{\rho = e^{x_0}, 0 < \psi < 2\pi\}$. $D \mapsto D^* = \{0 < \arg w < 2\pi\}$.

Аналитическое продолжение.

Определение. *Элементом $F = (U, f)$ называется пара, состоящая из круга $U = \{|z - a| < R\}$ и функции f, голоморфной в U. Точка a называется центром элемента, а R — его радиусом.*

Элементы $F = (U, f)$ и $G = (V, g)$ считаются равными, если $U = V$, и $f \equiv g$ на $U = V$.

Определение. *Элемент F называется каноническим, если U есть круг сходимости ряда Тейлора для f с центром в точке a.*

Определение. *Канонический элемент $F = (U, f)$ является непосредственным аналитическим продолжением (НАП) элемента $G = (V, g)$, если $U \cap V \neq \emptyset$ и $f \equiv g$ на $U \cap V$.*

Свойства НАП.

1) Свойство Вейерштрасса. Пусть $F = (U, f)$ и $G = (V, g)$ являются НАП друг друга, причем центр b элемента G лежит внутри $U \setminus \{a\}$. Тогда ряд Тейлора для g (с центром в точке b) получается из ряда Тейлора для f (с центром в точке a) переразложением в точке b, то есть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \Rightarrow$
$g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}(z - b)^n$.

2) Свойство треугольника. Если $G = (U, g)$ есть НАП элемента $F = (U, f)$, $H = (W, h)$ есть НАП $G = (V, g)$, причем $U \cap V \cap W \neq \emptyset$, то H есть НАП F.

3) Свойство единственности канонических элементов. Если канонический элемент $F = (U, f)$ есть НАП канонического элемента $G = (V, g)$, и центры этих элементов совпадают, то $F = G$.

Определение. *Элемент $G = (V, g)$ является аналитическим продолжением элемента $F = (U, f)$ вдоль цепочки элементов, если найдется конечный набор элементов $F_\nu = (U_\nu, f_\nu)$, $\nu = 0, \ldots, n + 1$, таких, что*
1) $F_0 = F,\ F_{n+1} = G$;
2) $F_{\nu+1}$ есть НАП F_ν для $\nu = 0, \ldots, n$.

Определение. *Пусть $\gamma :\ [0, 1] \to \mathbb{C}$ — путь с началом в точке a и концом в точке b. Канонический элемент $G = (V, g)$ с центром в точке b есть аналитическое продолжение канонического элемента $F = (U, f)$ с центром в точке a вдоль пути γ, если найдется семейство канонических элементов $F_t = (U_t, f_t)$ для $t \in [0, 1]$, обладающее следующими свойствами:*
1) $F_0 = F,\ F_1 = G$;
2) U_t имеют центр в точке $a_t = \gamma(t)$ и радиус $R(t) > 0$;
3) для $\forall t_0 \in [0, 1]$ найдется интервал $u(t_0)$, содержащий t_0 на [0,1] такой, что $\gamma(u(t_0)) \subset U_{t_0}$, и для $\forall t \in u(t_0)$ элемент F_t есть НАП F_{t_0}.

Теорема. (о единственности продолжения вдоль пути). *Если канонический элемент $F = (U, f)$ допускает аналитическое продолжение вдоль пути γ, то результат продолженгия не зависит от выбора продолжающего семейства F_t, иначе говоря, если канонические элементы F_1 и G_1 получаются из F аналитическим продолжением вдоль пути γ, то $F_1 = G_1$.*

Теорема. *Радиус $R(t)$ канонического элемента F_t, осуществляющего аналитическое подолжение канонического элемента F вдоль γ, либо тождественно равен $+\infty$, либо является непрерывной функцией от t на [0,1].*

Теорема. *Канонический элемент* $G = (U, f)$ *вдоль некоторого пути* $\gamma \quad \Leftrightarrow \quad G$ *является аналитическим продолжением* F *вдоль некоторой цепочки канонических элементов.*

Определение.

1) Пути $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ *с общими началом и концом (то есть* $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a, \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$*) называются гомотопными в области* D*, если существует непрерывное отображение* $\Gamma : I \times I \to D$ *такое, что* $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$ *и* $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$ *для* $\forall t \in I$*;* $\Gamma(0, s) = a,\ \Gamma(1, s) = b,\ s \in I$*.*

2) Замкнутые пути $\gamma_0, \gamma_1 : I \to D$ *(то есть* $\gamma_0(0) = \gamma_0(1),\ \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$*) называются гомотопными в* D*, если существует* $\Gamma : I \times I \to D$ *(непрерывное отображение) такое, что* $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t),\ \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t),\ \forall t \in I,\ \Gamma(0, s) = \Gamma(1, s),\ s \in I$*.*

Отношение гомотопности — отношение эквивалентности на множестве всех замкнутых путей $\gamma : I \to D$. Если существует только один класс эквивалентности, то область D называется односвязной.

Теорема. (теорема о монодромии) *Пусть* $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ *с общими концами, то есть* $\exists \gamma_s : [0,1] \to \mathbb{C},\ 0 \le s \le 1$*, причем* $\gamma_s(0) = a,\ \gamma_s(1) = b$*. Допустим, что канонический элемент* $F = (U, f)$ *с центром в точке* a *допускает аналитическое продолжение вдоль любого из путей* γ_s*. Тогда результаты аналитического продолжения* F *вдоль* γ_0 *и* γ_1 *совпадают.*

Теорема. (2-я теорема о монодромии) *Если канонический элемент* $F = (U, f)$ *аналитически продолжается вдоль любого пути* γ *в односвязной области* D, $U \subset D$*, то результат аналитического продолжения не зависит от выбора пути, а однозначно определяется его концом и задает голоморфную функцию в области* D*, значение которой в точке* $z \in D$ *равно значению канонического элемента* $F_2 = (U_2, t_2)$*, получающегося аналитическим продолжением* F *в точку* z *вдоль произвольного пути* γ*, соединяющего* F *и* z*.*

Определение. *(Многозначной) аналитической функцией в области* D *называется семейство* $\mathcal{F}$ *канонических элементов* F*, получающихся из некоторого канонического элемента* $F_0 = (U_0, f_0)$ *с* $U_0 \subset D$*, аналитическим продолжением вдоль всевозможных путей, лежащих в* D *(вдоль которых это продолжение возможно) с началом в центре* F_0*. Две аналитические функции в* D *равны, если совпадают составляющие их семейства канонических элементов.*

Определение. *Областью определения* $\mathcal{F}$ *называется область вида* $D = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$*, где* U_α *— круги сходимости всевозможных элементов.*

Определение. *Если* G *— подобласть в области определения* $D = D(\mathcal{F})$ *аналитической функции* $\mathcal{F}$*, то подограничением* $F|G$ *называется совокупность канонических элементов* F*, полученных из некоторого начального элемента* $F_0 = (U_0, f_0) \in \mathcal{F}$ *с* $U_0 \in G$ *аналитическим продолжением вдоль всевозможных путей, лежащих в* G*.*

Определение. *Если* $F|G$ *совпадает с голоморфной функцией* f*, то эта функция* f *называется ветвью аналитической функции* $\mathcal{F}$ *в области* G*.*

Определение. *Аналитическим элементом аналитической функции* $\mathcal{F}$ *назыветса пара* (D, f)*, где* D *— подобласть в* $D(f)$*, а* f *— голоморфная ветвь* $\mathcal{F}$ *в* D*. Аналитический элемент* $G = (E, g)$ *является НАП аналитического элемента* $F = (D, f)$*, если* $D \cap E \ne \emptyset$ *и* $f \equiv g$ *хотя бы на одной связной компоненте* $D \cap E$*.*

Корень $\sqrt[n]{z}$.

Начальный аналитический элемент: $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{R}} = \{z = r\,e^{i\varphi}, -\pi < \varphi < \pi, z > 0\}$, $f_0 = \sqrt[n]{z}\,e^{i\varphi/n}$, где $z = r\,e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$, так как $f_0'(z) = \frac{1}{n(f_0(z))^{n-1}}$, то f_0 голоморфна в D_0. $\sqrt[n]{z}$ получается из (D_0, f_0) аналитическим продолжением вдоль путей в $\mathbb{C}$, не проходящих через $z = 0$ и состоящих из аналитических элементов вида (D_α, f_α), $\alpha \in \mathbb{R}$, где $D_\alpha = \{-\pi + \alpha <$

$\varphi < \pi + \alpha\}$, $f_\alpha(z) = \sqrt[n]{z}\, e^{i\varphi/n}$, где $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$. Область определения $\sqrt[n]{z}$ — это $D = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} D_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{z = 0\}$.
В терминах канонических элементов за начальный канонический элемент можно было взять $U = \{|z-1| < 1\}$, $g_0(z) = (1 + (z-1))^{1/n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{1}{n} - k + 1\right)(z-1)^k$.
Каждой точке $z \in D$ относятся n различных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$. Действительно, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$. Ветвь $\sqrt[n]{z}$ можно выделить в любой подобласти D, не содержащей петли, охватывающей $z = 0$.

Логарифм $\operatorname{Ln} z$.
Начальный аналитческий элемент $D_0 = \{z = r\, e^{i\varphi}, r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$, $f_0(z) = \ln z = \ln r + i\varphi$, где $z = r\, e^{i\varphi}$. Аналитическая функция $\operatorname{Ln} z$ состоит из аналитичуских элементов (D_α, f_α), $D_\alpha = \{z = r\, e^{i\varphi}, -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$. $f_\alpha = \ln r + i\varphi$, где $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha \quad\Rightarrow\quad$ область определения $D = D(\operatorname{Ln} z) = \mathbb{C}\ setminus\{0\}$ и к любой точке z относится счетное число различных значений ветвей $\operatorname{Ln} z$.
$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$, k — целое число. Ветвь $\operatorname{Ln} z$ можно выделить в любой подобласти D, не содержащей петли, охватывающей $z = 0$.

Особые точки аналитической функции.

Определение. *Точка a называется изолированной особой точкой аналитической функции $\mathcal{F}$, если найдутся проколотая окрестность $V = \{0 < |z - a| < R\}$ и канонический элемент $F_0 = (U_0, f_0) \subset U_0 \subset V$ такой, что аналитическое продолжение F_0 возможно вдоль любого пути $\gamma \subset U$.*

Пусть γ_0 — замкнутый жорданов (взаимно - обратный) путь в V с началом в центре $F_0 \quad\Rightarrow$ возможны 2 случая.
1) F_0 не меняется при обходе вдоль $\gamma_0 \quad\Rightarrow\quad$ точка a — однозначная особая точка.
2) F_0 меняется при обходе вдоль $\gamma_0 \quad\Rightarrow\quad$ точка a назывется многозначной особой точкой, или точкой ветвления.
а) Если при $|n|$ - кратном обходе вдоль $\gamma \quad F_0$ не меняется, то это точка ветвления конечного порядка, наименьшее из чисел $|n|$, обладающих этим свойством, называется порядком ветвления.
б) Если такого целого n не существует, то a — логарифмическая точка ветвления.

Билет 23.

Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ – (непрерывная) кривая в $\mathbb{C}$, функция $f(z)$ определена на множестве $[\gamma] = \gamma([a, b])$.

Определение. *Разбиением T отрезка $[a, b]$ называется любой набор чисел $t_0, \dots, t_n$ такой, что $a = t_0 < \dots < t_n = b$.*

Определение. *Число $d(T) = \max\limits_{k=1\dots n} (t_k - t_{k-1})$ называется диаметром разбиения T.*

Определение. *Разбиение T с дополнительно выбранными точками $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$, называется размеченным разбиением и обозначается T_ξ.*

Рассмотрим для каждого $\delta > 0$ множество таких T_ξ, что $d(T_\xi) < \delta$. Эти множества образуют базу на множестве всех размеченных разбиений. Эта база обозначается $d(T) \to 0$.

Взяв размеченное разбиение $T_\xi = (t_0, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ отрезка $[a, b]$, можно построить интегральную сумму

$$\sigma(f, \gamma, T_\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

Определение. *Если существует предел $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma(f, \gamma, T_\xi)$, он называется интегралом f по кривой γ, и обозначается $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{dz}$.*

Предложение. *Интеграл не зависит от параметризации кривой.*

Доказательство.

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ и $\gamma' : [a', b'] \to \mathbb{C}$ – две параметризации одной кривой, то есть, существует $\varphi : [a, b] \to [a', b']$ – возрастающий гомеоморфизм такой, что $\gamma = \gamma' \circ \varphi$. Каждому размеченному разбиению T_ξ отрезка $[a, b]$ сопоставим разбиение $\varphi(T_\xi)$ отрезка $[a', b']$ с точками разбиения $t'_k = \varphi(t_k)$ и $\xi'_k = \varphi(\xi_k)$. Поскольку φ – гомеоморфизм, это отображение обратимо.

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она равномерно непрерывна на $[a, b]$, и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что из $|x_1 - x_2| < \delta$ следует $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$. Это означает, что из $d(T_\xi) < \delta$ следует $d(\varphi(T_\xi)) < \varepsilon$. Поскольку φ – гомеоморфизм, φ^{-1} – существует и непрерывна. Поэтому, то же рассуждение проходит и в другую, в силу чего базы $d(T_\xi) \to 0$ и $d(\varphi(T_\xi)) \to 0$ эквивалентны.

Непосредственно проверяется, что $\sigma(f, \gamma, T_\xi) = \sigma(f, \gamma', \varphi(T_\xi)$. Переходя в этом равенстве к пределу и пользуясь эквивалентностью баз, получаем

$$\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{dz} = \lim_{d(T_\xi)\to 0} \sigma(f, \gamma', \varphi(T_\xi) = \lim_{d(\varphi(T_\xi))\to 0} \sigma(f, \gamma', \varphi(T_\xi) = \int\limits_{\gamma'} f(z)\mathrm{dz}$$

□

Определение. *Рассмотрим кривую $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Для T – неразмеченного разбиения отрезка $[a, b]$ обозначим $\sigma(\gamma, T) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$ Если существует предел $\lim\limits_{d(T)\to 0} \sigma(\gamma, T) = L(\gamma)$, то он называется длиной кривой γ, а сама кривая называется измеримой.*

Предложение. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на измеримой кривой γ. Тогда определен интеграл f по кривой γ.*

Доказательство.

Выберем $\varepsilon > 0$ и проверим критерий Коши существования предела по базе $B = d(T) \to 0$. Функция $\sigma(\gamma, T)$ имеет предел по B, а, значит, ограничена на одном из множеств B. Иначе говоря, $\exists U_1 \in B, M > 0$, такие, что $\forall T \in U_1$, $\sigma(\gamma, T) < M$. Так как функция $g = f \circ \gamma$ непрерывна на $[a, b]$, она равномерно непрерывна на нем, и существует такое $\delta > 0$, что $\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta$, справедливо $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(2M)$. Пусть $U_2 = \{T_\xi | d(T_\xi) < \delta\} \in B$, и положим $U = U_1 \cap U_2$.

Выберем $T^1_\zeta, T^2_\eta \in U$, и $T = T^1 \cup T^2$ – объединяем "разбивающие"точки как упорядоченные наборы. Выберем $\xi_k = t_k$ для всех точек T, получим размеченное разбиение T_ξ. Отметим, что $T_\xi \in U$, поскольку добавление точек не увеличивает диаметр. Оценим

$$|\sigma(f, \gamma, T^1_\zeta) - \sigma(f, \gamma, T_\xi)| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} g(\zeta_k)(\gamma(t^1_k) - \gamma(t^1_{k-1})) - \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| =$$

здесь m – число точек в разбиении T^1, n – число точек в разбиении T. Далее, отрезки разбиения T получаются разбиением отрезков T^1 точками разбиения T^2. Определим $k(i)$ условием $[t_{i-1}, t_i] \subset [t^1_{k(i)-1}, t^1_{k(i)}]$, тогда

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} g(\zeta_k) \left(\sum_{i:k(i)=k} (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right) - \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} (g(\zeta_{k(i)}) - g(\xi_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \leq$$

далее, $|\zeta_{k(i)} - \xi_i| < \delta$, поскольку они лежат на одном отрезке разбиения T^1, диаметр которого меньше δ, в силу чего $|g(\zeta_{k(i)}) - g(\xi_i)| \leq \varepsilon/(2M)$, и

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \frac{\varepsilon}{2M} \sigma(\gamma, T) \leq \frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2}$$

здесь использовано $\sigma(\gamma, T) < M$ для $T \in U \subset U_1$.

Аналогично, $|\sigma(f, \gamma, T^2_\eta) - \sigma(f, \gamma, T_\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, откуда, по неравенству треугольника, $|\sigma(f, \gamma, T^1_\zeta) - \sigma(f, \gamma, T^2_\eta)| \leq \varepsilon$, $\forall T^1_\zeta, T^2_\eta \in U$. По критерию Коши, интегральные суммы имеют предел.

□

Далее нас будут интересовать только непрерывные функции на измеримых кривых, поэтому будем считать все интегралы существующими и длины кривых определенными.

Перечислим основные свойства интеграла:

1) (Линейность). Для функций f, g и констант a, b

$$\int\limits_\gamma (af(z) + bg(z))\mathrm{dz} = \int\limits_\gamma af(z)\mathrm{dz} + \int\limits_\gamma bg(z)\mathrm{dz}$$

2) (Оценка модуля). Если $|f(z)| < M$ на γ, то $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{dz}\right| < ML(\gamma)$.

3) Интеграл по кривой, проходимой в противоположную сторону, имеет противоположный знак.

4) Рассмотрим две кривые γ_1 и γ_2, пусть конец первой совпадает с началом второй, тогда

$$\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\mathrm{dz} = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\mathrm{dz} + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\mathrm{dz}$$

Первое свойство очевидно справедливо для суммы по любому размеченному разбиению в определении интеграла, и далее сохраняется при предельном переходе. Для доказательства второго свойства следует в неравенстве $|\sigma(f,\gamma,T_\xi)| < M\sigma(\gamma,T)$ перейти к пределу $d(T) \to 0$. Третье свойство доказывается так же, как предложение о существании интеграла, только вместо возрастающих гомеоморфизмов надо рассматривать убывающие.

Докажем четвертое свойство. Пусть $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$, причем $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Рассмотрим некоторое $\delta > 0$ и выберем T^1_ζ – разбиение $[a,b]$ и T^2_η разбиение отрезка $[b,c]$ с диаметрами меньше δ. Пусть T_ξ – разбиение отрезка $[a,c]$, полученное объединением данных, тогда $d(T) < \delta$. Легко видеть, что $\sigma(f,\gamma_1\cup\gamma_2,T_xi) = \sigma(f,\gamma_1,T^1_\zeta) + \sigma(f,\gamma_2,T^2_\eta)$. При $\delta \to 0$ диаметры всех разбиений будут стрмиться к нулю, а обе части данного равенства – к соответствующим частям доказываемого равенства.

Из двух последних свойств следует, что интеграл по границе любой области равен сумме интегралов по границе подобластей.

Лемма. *Интеграл линейной функции по отрезку равен*

$$\int\limits_{[z_1,z_2]} (az+b)dz = \frac{a}{2}z_2^2 + bz_2 - \frac{a}{2}z_1^2 - bz_1 = \left(\frac{a}{2}z^2 + bz\right)\Big|_{z_1}^{z_2}$$

Доказательство.

Параметризуем отрезок $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0,1]$, тогда

$$\sigma(f,T_\xi) = \sum_{k=1}^{n}(a(z_1 + \xi_k(z_2 - z_1)) + b)(z_1 + t_k(z_2 - z_1) - (z_1 + t_{k-1}(z_2 - z_1))) =$$

$$= (az_1 + b)(z_2 - z_1)\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) + a(z_2 - z_1)^2\sum_{k=1}^{n}\xi_k(t_k - t_{k-1})$$

первая сумма равна 1, а вторая является интегральной суммой для (вещественного) определенного интеграла $\int_0^1 x\,dx = 0.5$. Переходя к пределу по $d(T) \to 0$, получаем

$$\int\limits_{[z_1,z_2]} (az+b)dz = (az_1 + b)(z_2 - z_1) + 0.5a(z_2 - z_1)^2$$

несложно проверить, что это выражение равно доказываемому.

□

Из этой леммы следует, что интеграл линейной функции по любой замкнутой ломаной равен нулю.

Теорему Коши докажем для относительно слабого условия: функция голоморфна в некоторой большей области.

Теорема. (Коши). *Пусть функция f голоморфна в области D, и область B лежит в области D вместе со своим замыканием $\overline{B} \subset D$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial B} f(z)\mathrm{dz} = 0$$

Доказательство.

Доказательство состоит из нескольких шагов, последовательно обобщающих теорему.

Шаг 1. Пусть область B – треугольник. Предположим, что интеграл f по границе B равен по модулю $M > 0$. Обозначим длину границы B (периметр треугольника) через p. Разобъем каждую из сторон треугольника пополам, и соединим попарно полученные точки. Тогда треугольник разбивается на четыре меньших треугольника с периметром $\frac{p}{2}$. С другой стороны, интеграл по границе большого треугольника равен сумме интегралов по границам меньших треугольников. Поэтому найдется треугольник, интеграл по границе которого по модулю больше или равен $\frac{M}{4}$. Обозначим этот треугольник B_1.

Повторяя описанную операцию с треугольником B_1, получим B_2, и так далее. Периметр тругольника B_n равен $\frac{p}{2^n}$, интеграл по его границе по модулю не менее $\frac{M}{4^n}$.

Замыкания треугольников $\overline{B_n}$ образуют последовательность замкнутых вложенных друг в друга множеств, диаметр которых стремится к нулю (он не превосходит периметра треугольника). Значит, у $\overline{B_n}$ существует общая точка z_0. Она принадлежит $\overline{B} \subset D$, поэтому в точке z_0 функция голоморфна. Поэтому, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z0) + \overline{\overline{o}}(z - z_0)$. Выберем $\varepsilon = \frac{M}{p^2}$. По определению $\overline{\overline{o}}$, существует такая окрестность точки z_0, в которой последнее слагаемое по модулю меньше $\varepsilon(z - z0)$. Существует треугольник B_n, целиком лежащий в этой окрестности. Для точек на границе B_n, $|z - z0| < \frac{p}{2^n}$ (расстояние между двумя точками треугольника не превосходит его периметра). Значит, на границе B_n справедливо $|\overline{\overline{o}}(z - z_0)| < \varepsilon \cdot \frac{p}{2^n}$.

Вычислим интеграл $f(z)$ по границе треугольника. Интеграл линейной части по границе равен 0 (см. замечание перед теоремой). Значит,

$$I = \int\limits_{\partial B_n} f(z)\, dz = \int\limits_{\partial B_n} \overline{\overline{o}}(z - z0)\, dz$$

и далее интеграл по модулю не превосходит произведения длины контура на максимум модуля подинтегральной функции

$$|I| < \left(\varepsilon \cdot \frac{p}{2^n}\right) \cdot \frac{p}{2^n} = \frac{\varepsilon p^2}{4^n} = \frac{M}{4^n}$$

Однако, $|I| \geq \frac{M}{4^n}$ по построению треугольников B_n. Полученное противоречие показывает, что $M = 0$.

Шаг 2. Пусть теперь область B – многоугольник, его граница – замкнутая ломаная без самопересечений. Тогда B можно разбить на конечное число треугольников. Интеграл по границе B равен сумме интегралов по границам треугольников, а последние равны 0.

Шаг 3. Пусть B – произвольная односвязная область, $\gamma = \partial B : [a,b] \to \mathbb{C}$ – измеримая кривая, и $I = \int\limits_{\partial B} f(z)\,dz$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Функция $\sigma(\gamma, T)$ имеет предел по $d(T) \to 0$, в силу чего ограничена на одном из множеств, образующих эту базу. Иначе говоря, $\exists \delta_1 > 0, M > 0$, такие, что $\forall T$, $d(T) < \delta_1$, справедливо $\sigma(\gamma, T) \le M$. Далее, существует δ_2 такое, что $\forall T_\xi$, $d(T_\xi) < \delta_2$, справедливо $|\sigma(f, \gamma, T_\xi) - I| < \varepsilon/2$.

Так как γ лежит строго внутри D и непрерывна, существует такое $\delta > 0$, что множество $V_\delta = \left\{z \middle| \exists\, t, |z - \gamma(t)| \le \delta\right\}$ целиком лежит в D (для доказательства этого, определим $\delta(t) > 0$ как радиус шара с центром $\gamma(t)$, целиком лежащего в D. Эта функция непрерывна на $[a,b]$, а потому достигает своего минимума $\delta > 0$). V_δ – компакт, функция f равномерно непрерывна на нем, а потому существует такое $0 < \delta' < \delta$, что $\forall x, y \in V_\delta$, $|x - y| < \delta'$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2M$.

Так как функция γ непрерывна, она равномерно непрерывна на $[a,b]$. В частности, сщуествует такое δ_3, что $\forall T$, $d(T) < \delta_3$, справедливо $|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < \delta'$.

Выберем $T = (t_0, \dots, t_n)$ так, чтобы $d(T) < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, и точки $\xi_k = t_k$. Для размеченного разбиения T_ξ будут выполнены все указанные выше условия. Пусть γ' – ломаная с вершинами $\gamma(t_k)$, она замкнута. Пусть I' – интеграл f по γ'. γ' может иметь самопересечения, но в этом случае является объединением конечного числа замкнутых ломаных без самопересечений. Интеграл по каждой из них равен 0, в силу чего $I' = 0$. Пусть $\Delta_k = [\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)]$ – отрезок ломаной. Оценим

$$|\sigma(f, T_\xi, \gamma) - I'| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} f(z)\,dz \right| =$$

здесь вторая сумма представляет интеграл по ломаной как сумму интегралов по составляющим ее отрезкам. Каждое слагаемое в первой сумме представимо как интеграл константы по отрезку Δ_k, после чего суммы можно объединить, и внести модуль внутрь:

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} f(\gamma(\xi_k))\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} f(z)\,dz \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Delta_k} |f(\gamma(\xi_k)) - f(z)|\,dz \le$$

далее, $z \in \Delta_k$, а $\xi_k = t_k$. Расстояние от конца отрезка до любой его точки не превосходит его длину, $|\gamma(\xi_k) - z| < |\Delta_k| = |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < \delta'$. Кроме того, $\gamma(\xi_k)$ и z лежат в V_δ (первая на кривой, а вторая на расстоянии $< \delta' < \delta$ от нее). Поэтому, $|f(\gamma(\xi_k)) - f(z)| < \varepsilon/(2M)$, так что

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2M} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \frac{\varepsilon}{2M} \sigma(\gamma, T) \le \frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2}$$

Поскольку $I' = 0$, $|\sigma(f, T_\xi, \gamma)| < \varepsilon/2$, но и $|\sigma(f, T_\xi, \gamma) - I| < \varepsilon/2$, что означает $|I| < \varepsilon$. Поскольку это неравенство справедливо для любого ε, заключаем, что $I = 0$.

Шаг 4. Пусть B – произвольная многосвязная область. Тогда B можно конечным числом кривых разбить на односвязные области. Интеграл по границе B равен сумме интегралов по границам этих областей, а они равны нулю.

□

Лемма. (1). *Пусть функция f голоморфна в области D за исключением точки $a \in D$. Пусть в D содержатся две области B_1 и B_2, причем $\overline{B_1} \subset D$, $\overline{B_2} \subset B_1$, $a \in B_2$. Тогда* $\int\limits_{\partial B_1} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial B_2} f(z)\mathrm{d}z$.

Доказательство.

Функция f голоморфна в области $B = B_1 - \overline{B_2}$ и голоморфна в $D - \{a\} \supset \overline{B}$. По теореме Коши,

$$0 = \int\limits_{\partial B} f(z)\mathrm{dz} = \int\limits_{\partial B_1} f(z)\mathrm{dz} - \int\limits_{\partial B_2} f(z)\mathrm{dz}$$

$\square$

Лемма. *Интеграл функции $1/(z-a)$ по окружности $\gamma = \left\{z \middle| |z-a| = r\right\}$, $r > 0$, равен $2\pi i$.*

Доказательство.

Окружность параметризуется $z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда $1/(z-a) = e^{-it}/r$. Фиксируем некоторое n и рассмотрим разбиение T: $t_k = 2\pi k/n$, $k = 0, \ldots, n$, размеченное точками $\xi_k = t_{k-1}$, $k = 1, \ldots n$. Тогда интегральная сумма

$$\sigma\left(\frac{1}{(z-a)}, \gamma, T_\xi\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-it_{k-1}}}{r}\left(re^{it_k} - re^{it_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{i(t_k - t_{k-1})} - 1\right) =$$

здесь мы сократили на r и перемножили экспоненты. Далее, $t_k - t_{k-1} = 2\pi/n$, все слагаемые одинаковы, и сумма равна слагаемому, умноженному на их количество

$$= \left(e^{2\pi i/n} - 1\right) n = 2\pi i \frac{e^{2\pi i/n} - 1}{2\pi i/n} = 2\pi i \frac{e^h - 1}{h}$$

обозначая $h = 2\pi i/n$. Переходя к пределу $n \to \infty$, получим $h \to 0$, в силу чего предел дроби в правой части будет равен производной e^z в нуле, то есть 1, и предел правой части равен $2\pi i$. С другой стороны, $d(T) = |h| \to 0$, и предел левой части будет искомым интегралом.

$\square$

Теорема. (Интеграл Коши). *Пусть функция f голоморфна в области D, и область B лежит в области D вместе со своим замыканием $\overline{B} \subset D$. Тогда $\forall z \in B$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Доказательство.

Рассмотрим некоторое (малое) число $r > 0$. Пусть U – круг радиуса r с центром z. Поскольку B – область, при достаточно малых r он лежит внутри B. Далее, считаем r достаточно малым.

Функция $g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ голоморфна в области B за исключением точки z. По лемме (1), $\int\limits_{\partial B} g(\xi)d\xi = \int\limits_{\partial U} g(\xi)d\xi$. В частности, последний интеграл не зависит от r.

С другой стороны, в силу голоморфности f в точке z, функция $g(\xi)$ имеет предел в точке z, в силу чего она ограничена в окрестности этой точки, $|g(z)| < M$ в U при достаточно малых r. Отсюда, $\left|\int\limits_{\partial U} g(\xi)d\xi\right| \leq M \cdot L(\partial U) = 2\pi r M$, левая часть этого выражения не зависит от r, как уже говорилось, а правая сколь угодно мала при $r \to 0$. Значит, левая часть равна 0.

Преобразуем полученный результат

$$0 = \int\limits_{\partial U} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int\limits_{\partial U} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int\limits_{\partial U} \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

Последний интеграл равен $2\pi i$ по лемме, в силу чего

$$2\pi i f(z) = \int\limits_{\partial U} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

последний переход сделан по лемме (1). Деля выражение на $2\pi i$, получаем искомый результат.

$\square$

Ниже будут использоваться понятия комплексного ряда, комплексного степенного ряда, равномерной сходимости в комплексной области. Напомним основные факты о них:

Лемма. *Областью сходимости степенного ряда является круг, ряд равномерно сходится внутри него. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке внутри круга сходимости, и почленно интегрировать по любой кривой в круге сходимости.*

Теорема. (О ряде Тейлора). *Пусть область D – круг радиуса r с центром a, функция f голоморфна в D. Тогда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}$$

в круге D.

Доказательство.

Фиксируем $z \in D$, и выберем δ из условия $r > \delta > |z - a|$. Пусть B – круг радиуса δ с центром a, тогда на окружности $\partial B = \big\{\xi \big| |\xi - a| = \delta\big\}$ функция $f(\xi)$ определена. Переменная ξ ниже будет принимать значения на этой окружности.

Легко убедится, что известная формула для геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

остается верной для комплексных x. При этом, ряд в правой части сходится равномерно на любой окружности $|x| = c < 1$. Пользуясь этим, вычислим

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k$$

этот ряд сходится равномерно по ξ на окружности ∂B (при этом $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{\delta} = const < 1$). Умножим полученное равенство на $f(\xi)$ и проинтегрируем почленно по этой окружности (корректно в силу равномерной сходимости):

$$\int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int\limits_{\partial B} f(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (z-a)^k \int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi$$

После деления на $2\pi i$, в левой части получим $f(z)$ по предыдущей теореме. Итак,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (z-a)^k c_k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

Полученный ряд сходится в круге B, поэтому равномерно сходится внутри него. Значит, его можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз, то есть, функция $f(z)$ бесконечно дифференцируема. Дифференцируя ряд, находим $f^{(k)}(a) = k!\, c_k$, откуда получается искомое

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}$$

причем, напомним, верное для любого $z \in D$.

$\square$

В процессе доказательства получилась формула

$$f^{(k)}(a) = k!\, c_k = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = \delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi \tag{2}$$

(где $\delta \in (0, r)$ произвольно), на которой основано следующее

Следствие. (Обобщенный интеграл Коши). *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда f бесконечно дифференцируема в области D, и $\forall z \in D$,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

где B – произвольная область такая, что $\overline{B} \subset D$ и $z \in B$.

Доказательство.

По лемме (1), достаточно показать, что

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

где U – круг достаточно малого радиуса с центром в z. Но это выражение есть (2) с точностью до переобозначения $a = z$, $k = n$.

$\square$

Билет 24.

Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.

Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – функция комплексного переменного.

Лемма. *Пусть функция f голоморфна в области $D = \{z \,|\, 0 < |z-a| < \varepsilon\}$. Тогда при $0 < s < \varepsilon$ интеграл*

$$\int\limits_{|z-a|=s}^{f} (dxz)dz$$

не зависит от s.

Доказательство.

Пусть $0 < s_1 < s_2 < \varepsilon$, положим $B = \{z \,|\, s_1 < |z-a| < s_2\}$. Функция f голоморфна в $D \supset \overline{B}$, в силу чего можно воспользоваться теоремой Коши:

$$0 = \int\limits_{\partial B} f(z)\mathrm{dz} = \int\limits_{|z-a|=s_2}^{f} (dxz)\mathrm{dz} - \int\limits_{|z-a|=s_1}^{f} (dxz)\mathrm{dz}$$

откуда последние интегралы равны, что и является искомым утверждением.

□

Определение. *Точка $a \in \mathbb{C}$ называется особой точкой однозначного характера для функции f, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что f голоморфна в области $D = \{z \,|\, 0 < |z-a| < \varepsilon\}$.*

Теорема. (О ряде Лорана). *Пусть a – особая точка однозначного характера для функции f, f голоморфна в области $D = \{z \,|\, 0 < |z-a| < \varepsilon\}$. Тогда для некоторых $c_k \in \mathbb{C}$*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

в круге D.

Доказательство.

Фиксируем $z \in D$, и выберем r, R так, чтобы $0 < r < |z-a| < R < \varepsilon$.

На окружности $\Gamma = \{\xi \,|\, |\xi - a| = R\}$ функция $f(\xi)$ определена. Далее, на Γ справедливо $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{R} = const < 1$. В силу этого,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{\xi-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi-a} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k$$

и этот ряд сходится равномерно по ξ на Γ. Умножим полученное равенство на $f(\xi)$ и проинтегрируем почленно по Γ (корректно в силу равномерной сходимости):

$$\int\limits_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx = \int\limits_{\Gamma}^{f} (dx\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (z-a)^k \int\limits_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}} d\xi dx$$

Теперь рассмотрим окружность $\gamma = \{\xi \,|\, |\xi - a| = r\}$, на ней функция $f(\xi)$ также определена. Но теперь $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| = \frac{r}{|z-a|} = const < 1$, поэтому

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^k$$

и этот ряд сходится равномерно по ξ на γ. Умножим полученное равенство на $f(\xi)$ и проинтегрируем почленно по γ:

$$\int_{\gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx = -\int_{\gamma}^{f} (dx\xi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\xi-a)^k}{(z-a)^{k+1}}d\xi = -\sum_{k=1}^{\infty}(z-a)^{-k-1}\int_{\gamma}^{f}(dx\xi)(\xi-a)^k d\xi$$

Вычитая полученные равенства, получаем соотношение

$$\int_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx - \int_{\gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(z-a)^k \int_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}} d\xi dx + \sum_{k=1}^{\infty}(z-a)^{-k-1}\int_{\gamma}^{f}(dx\xi)(\xi-a)^k d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(z-a)^k \int_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}} d\xi dx + \sum_{k=-\infty}^{1}(z-a)^k \int_{\gamma}^{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}} d\xi dx$$

Далее, интегралы в правой части последнего равенства не зависят от радиуса окружности интегрирования по лемме. Поэтому, в них можно вести интегрирование по "общей"окружности $|\xi - a| = s$, после чего суммы можно объединить. Получаем

$$\int_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx - \int_{\gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(z-a)^k \int_{|\xi-a|=s}^{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}} d\xi dx$$

С другой стороны, обозначив $B = \{z \,|\, r < |z-a| < R\}$, получим

$$\int_{\Gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx - \int_{\gamma}^{\frac{f(\xi)}{\xi-z}} d\xi dx = \int_{\partial B}\frac{f(\xi}{\xi - z}d\xi = 2\pi i f(z)$$

Последний переход основан на теореме об интеграле Коши, поскольку в $D \supset \overline{B}$ функция f голоморфна и $z \in B$. Окончательно получаем в D

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=s}^{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}} d\xi dx$$

□

Построенный ряд называется рядом Лорана функции f в точке a. Часть ряда с $k \geq 0$ называется правильной частью, а с $k < 0$ – главной частью.

Последнее равенство в теореме о ряде Лорана означает, в частности, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = s}^{f} (dx\xi) d\xi = c_{-1}$$

при достаточно малых s (и не зависит от s).

Определение. *Этот интеграл называется вычетом функции f в точке a, и обозначается* $\operatorname*{res}_a f(z)$.

Теорема. (Коши). *Пусть функция f имеет в области D конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_n$, то есть голоморфна в области $D - \{a_1, \ldots, a_n\}$. Пусть B – область, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset B$ и $\overline{B} \subset D$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial B} f(z) \mathrm{dz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_k} f(z)$$

Доказательство.

В силу конечности числа точек n, для каждой точки a_k существует достаточно малое ε_k такое, что область $B_k = \{z \,|\, 0 < |z - a_k| < \varepsilon_k\}$ не содержит других особых точек, и $\overline{B_k} \subset B$. В силу этого,

$$\int\limits_{\partial B_k} f(z) \mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname*{res}_{a_k} f(z)$$

Пусть $U = B - \bigcup\limits_k \overline{B_k}$. Тогда U – область, и $\overline{U} \subset D - \{a_1, \ldots, a_n\}$, где функция голоморфна. По теореме Коши,

$$0 = \int\limits_{\partial U} f(z) \mathrm{dz} = \int\limits_{\partial B} f(z) \mathrm{dz} - \sum_{k=1}^{k} \int\limits_{\partial B_k} f(z) \mathrm{dz} = \int\limits_{\partial B} f(z) \mathrm{dz} - 2\pi i \sum_{k=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_k} f(z)$$

Приравнивая уменьшаемое и вычитаемое, получаем искомое утверждение.

□

Пусть a – изолированная особая точка однозначного характера для функции f, D – соответствующая малая проколотая окрестность точки a.

Теорема. *Возможны 3 случая:*

1) *Функция ограничена в области $D \Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана отсутствует. При этом функция имеет конечный предел A при $z \to a$, и доопределение $f(a) = A$ превращает ее в голоморфную функцию в $D \cup a$* (Теорема Римана).

2) *Функция стремится к бесконечности при $z \to a \Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана состоит из конечного (но отличного от 0) числа членов.*

3) *Функция неограничена в D, но не стремится к бесконечности при $z \to a \Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана состоит из бесконечного числа членов. При этом $\forall A \in \mathbb{C}$ (или $A = \infty$), $\exists z_n \to a$,* $f(z_n) \to A$ (Теорема Сохоцкого).

Доказательство.

1. Пусть функция ограничена в области D, тогда при $k < 0$ в интеграле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - a| = s}^{\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}}} d\xi dx$$

подынтегральная функция ограничена в области D, а длина окружности интегрирования, $2\pi i$, стремится к 0 при $s \to 0$. Поскольку интеграл не зависит от s, он равен 0, то есть $c_k = 0$ при $k < 0$, и главная часть отстутвует. Тогда в D

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

и этот ряд сходится и в точке a, причем в круге сходимости он определяет голоморфную функцию (и совпадающую с f в D). Поскольку из голоморфности следует непрерывность, f имеет в точке a конечный предел A, и доопределенная функция в точке a и будет равна A.

2. Пусть $f(z)$ стремится к бесконечности при $z \to a$, тогда $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ стремится к 0 при $z \to a$. Следовательно, для функции g реализуется первый случай, и

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z-a)^k$$

Далее, не все d_k равны 0, пусть $d_0 = 0, \ldots, d_{n-1} = 0, d_n \neq 0$, тогда

$$g(z) = (z-a)^n \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-n} (z-a)^k = (z-a)^n h(z)$$

и функция $h(z)$ голоморфна в $D \cup \{a\}$, и $h(a) = d_n \neq 0$. Поэтому $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{h(z)}(z-a)^{-n}$, и $f(z)(z-a)^n = \frac{1}{h(z)}$ – голоморфная функция в $D \cup \{a\}$. Разложим ее в ряд Тейлора:

$$f(z)(z-a)^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n}$$

иначе говоря, главная часть ряда Лорана имеет конечное число членов.

Обратно, если главная часть ряда Лорана имеет конечное число членов, получаем

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

$c_{-n} \neq 0$. Тогда

$$f(z)(z-a)^n = \sum_{k=1}^{\infty} -n\infty c_{k-n} (z-a)^k = g(z)$$

где $g(z)$ – голоморфная функция (как сумма степенного ряда), $g(a) = c_{-n} \neq 0$. Значит,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$$

Числитель имеет в точке a ненулевой предел, знаменатель стремится к нулю, поэтому дробь стремится к бесконечности.

3. Условие получается автоматически, осталось лишь доказать теорему Сохоцкого. Для $A = \infty$ утверждение следует из неограниченности функции. Для $A \in \mathbb{C}$, положим

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

Если ни на какой последовательности не получается A, функция $g(z)$ будет ограничена в D, в силу чего для нее реализуется первый случай, то есть, ее можно считать голоморфной в $D \cup \{a\}$. Тогда для

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + A$$

в a реализуется первый случай (при $g(a) \neq 0$) или второй (при $g(a) = 0$).

□

Определение. *Если в окрестности точки a реализуется первый случай, особая точка называется устранимой.*

Определение. *Если в окрестности точки a реализуется второй случай, особая точка называется полюсом. Количество членов в главной части рядя Лорана называется порядком полюса.*

Определение. *Если в окрестности точки a реализуется третий случай, особая точка называется существенно особой.*

Из того, что $\operatorname*{res}_a f(z) = c_{-1}$, следует, что в устранимых точках вычет функции равен нулю. В полюсе порядка p вычет может быть найден по формуле:

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(p-1)!} \left(f(z)(z-a)^p\right)^{(p-1)}$$

которая без труда доказывается рассмотрением ряда Лорана.

Билет 25.

Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности

Определение. *Пусть U – единичный шар в R^n, и задано отображение $r : U \to R^m$, обладающее тремя свойствами:*

1) *r – гладкое;*
2) *отображение r инъективно (т.е., r – биекция U и $r(U)$);*
3) *матрица Якоби отображения r имеет ранг n в каждой точке области U*

тогда $r(U)$ называется локальной гладкой n-мерной поверхностью в R^m.

Определение. *Множество M в R^m называется (глобальной) гладкой n-мерной поверхностью в R^m, если для любой точки $P \in M$ существуют окрестность $V(P) \in R^m$ такая, что $M \cap V(P)$ является локальной гладкой поверхностью в R^m.*

Определение. *По каждой точке $Q \in V(P) \cap M$ однозначно строится точка $r^{-1}(Q) \in U$ и вектор из n ее координат в $R^n \supset U$. Сопоставив эти координаты точке Q, мы получаем в $R^m \cap M$ криволинейную систему координат, называемую локальной системой координат на M в окрестности точки P, определяемой отображением r.*

Неявно определенные поверхности и поверхности, определенные как графики функций, являются гладкими поверхностями. Более того, эти три свойства локально эквивалентны. Точнее, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $M \subset R^m$, $P \in M$. Следующие три свойства эквивалентны:*

1) *существуют окрестность $V(P) \in R^m$ такая, что $M \cap V(P)$ является локальной гладкой n-мерной поверхностью в R^m;*
2) *существуют окрестность $V(P) \in R^m$ такая, что $M \cap V(P)$ задается (неявно) как "поверхность уровня"некоторого отображения $\varphi : V(P) \to R^{m-n}$ (то есть, $M \cap V(P) = \{Q \in V(P) | \varphi(Q) = 0\}$); при этом, отображение φ является гладким, и его матрица Якоби имеет (максимальный) ранг $m - n$.*
3) *существуют окрестность $V(P) \in R^m$ такая, что $M \cap V(P)$ задается как "график"некоторого гладкого отображения $\varphi : U \to R^{m-n}$, где U – область в R^n (то есть, $M \cap V(P) = \{(x, \varphi(x)) \in R^n | x \in U\}$ при соответствующей перенумерации координат).*

Доказательство.

<u>$2 \Rightarrow 3$</u>. Это утверждение является переформулировкой теоремы о неявном отображении. Поскольку матрица Якоби в точке P имеет ранг $m - n$, в ней содержится невырожденный минор $n \times n$. Возьмем соответствующие n координат за "x", а остальные за "u". Непосредственное применение теоремы о неяной функции дает искомую функцию φ.

<u>$3 \Rightarrow 1$</u>. Положим $r(x) = (x, f(x)) : R^n \to R^m$. Первые n компонент этого отображения задают тождественное отображение, в силу чего матрица Якоби содержит минор $n \times n$, являющийся единичной матрицей. Поэтому ранг матрицы Якоби равен n. Взаимнооднозначность очевидна.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$. Матрица Якоби J_r отображения r имеет ранг n, а, значит, содержит невырожденный минор $n \times n$. Не ограничивая общности, можно считать, что это "верхний"минор. Иначе говоря, матрица Якоби $J_{r'}$ отображения $r' : R^n \to R^n$, заданного первыми n компонентами r, невырождена. Построим отображение $f : R^m \to R^m$, со следующими компонентами:

$$f_i(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^m) = \begin{cases} r_i(x^1, \ldots, x^n) & i = 1, \ldots, n \\ r_i(x^1, \ldots, x^n) + x^i & i = n+1, \ldots, m \end{cases}$$

тогда матрица Якоби отображения f имеет вид

$$J_f = \left\{ \begin{matrix} J_{r'} & 0 \\ J & E \end{matrix} \right)$$

– блочная матрица $m + (n - m) \times m + (n - m)$, два левых блока образуют матрицу J_r. Здесь J – некоторая матрица, а E – единичная матрица. Легко видеть, что J_f невырождена. Рассмотрим, далее, отображение $F_i(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m) = f_i(x^1, \ldots, x^m) - y^i : R^{2m} \to R^m$. Минор матрицы Якоби отображения F, соответствующий переменным x_i, совпадает с J_f, то есть невырожден. Можно использовать теорему о неявном отображении, согласно которой, существует такое $g(y^1, \ldots, y^m) : R^m \to R^m$, что $F(g_1(y^1, \ldots, y^m), \ldots, g_m(y^1, \ldots, y^m), y^1, \ldots, y^m) = 0$, то есть, в векторном виде, $f(g(\bar{y})) = \bar{y}$. Пусть J_g – матрица Якоби отображения g. Дифференцируя (векторное) равенство $f(g(\bar{y})) = \bar{y}$ по правилу дифференцирования сложной функции, получим $J_f J_g = E$ – единичная матрица, в силу чего матрица J_g невырождена. Опять применяя теорему о неявной функции, получаем $g(f(\bar{x})) = \bar{x}$, то есть, отображение g – обратное к f.

Из определения, $f(x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0) = r(x^1, \ldots, x^m)$. Поэтому, $f(U \times 0) = M \cap V(P)$. Значит, $g(M \cap V(P)) = U \times 0$, в силу чего условия $g^i = 0$, $i = m+1, \ldots, n$, определяют $M \cap V(P)$. Отображение $\varphi : R^n \to R^{n-m}$, $\varphi^i = g^{i+m}$ для $i = 1, \ldots, n$, является гладким, а ранг его матрицы Якоби равен $n - m$ (она является подматрицей матрицы J_g, образованной последними $n - m$ строками; если бы ее ранг был меньше n, в ней бы были линейно зависимые строки; тогда они были бы и в J_g, и последняя была бы вырождена).

$\square$

Пусть $\Delta = [a, b] \ni 0$, $\gamma : \Delta \to U$ – гладкая кривая. Тогда $\varphi = r \circ \gamma : \Delta \to U$ задает гладкую кривую в R^m, лежащую на поверхности. Пусть $P = \varphi(0)$. Тогда касательный вектор к φ в P вычисляется как

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_0 = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial r}{\partial u^i}\right|_P \left.\frac{d\gamma^i}{dt}\right|_0$$

Множество всех касательных векторов в точке P называется касательным пространством и обозначается $T_P M$.

Фиксируем $1 < i < n$, и выберем в качестве γ функцию $x_i = t$, $x_j = 0$ при $j \neq i$. Тогда для соответствующих кривых (они называются координатными линиями) получим касательный вектор равным

$$v_i = \left.\frac{\partial r}{\partial u^i}\right|_P$$

откуда видно, что все вектора в $T_P M$ являются линейной комбинацией этих векторов. Поскольку, с другой стороны, любую комбинацию можно получить (подобрав соответствующие $\frac{d\gamma^i(0)}{dt}$ – это можно сделать на линейных функциях), получаем, что $T_P M$ – линейное пространство. Поскольку якобиан r

имеет максимальный ранг, вектора v_i линейно независимы, и $\dim T_P M = n$, причем v_i образуют там базис (называемый каноническим).

Вычислим длину кривой $\varphi(t) = r \circ \gamma$, $t \in [a, b]$. Рассматривая ее как кривую в R^m, вычисляем

$$l(\varphi) = \int_a^b \left\| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d\varphi(t)}{dt} \right)} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial u^i}\bigg|_{\gamma(t)} \frac{d\gamma^i}{dt}\bigg|_t, \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial u^j}\bigg|_{\gamma(t)} \frac{d\gamma^j}{dt}\bigg|_t \right)} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d\gamma^i}{dt}\bigg|_t \frac{d\gamma^j}{dt}\bigg|_t g_{ij}(\gamma(t))} dt$$

если для $P \in U$ обозначить

$$g_{ij}(P) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^j}\bigg|_P, \frac{\partial r}{\partial u^i}\bigg|_P \right) = (v_i, v_j)$$

Отметим, что $g_{ij}(P)$ для любого P есть невырожденная симметричная положительно определенная матрица (поскольку она есть матрица Грама системы векторов v_i). В силу этого, ее можно использовать в качестве матрицы скалярного произведения в $T_P M$. При этом из предыдущих формул следует, что длина кривой есть интеграл от длины касательного вектора в смысле этого скалярного произведения (при этом, она равна его длине в смысле скалярного произведения R^m – собственно, так она и строилась в предыдущей выкладке).

Определение. *Построенная квадратичная форма называется первой квадратичной формой поверхности M.*

Выведем формулу для зависимости g_{ij} от замены координат. Именно, рассмотрим в окрестности точки P еще одну систему координат $r'(v_1, \ldots, v^n) : V \to R^m$. Новые координаты $v^1, \ldots, v^n$ выражаются через старые $u^1, \ldots, u^n$ с помощью отображения $r' \circ r^{-1}$. Тогда

$$\frac{dr}{du^i} = \sum_{t=1}^n \frac{\partial r}{\partial v^t} \frac{\partial v^t}{\partial u^i} \quad \Rightarrow \quad g_{ij}(u) = \sum_{t,s=1}^n g_{ts}(v) \frac{\partial v^t}{\partial u^i} \frac{\partial v^s}{\partial u^j}$$

Отметим, что длина касательного вектора в смысле этого произведения сохраняется при заменах координат. Это можно доказать непосредственной выкладкой либо заметив, что она есть его длина в смысле скалярного произведения пространства R^m (это уже отмечалось). Это означает совпадение скалярных квадратов векторов. Поскольку $2(x, y) = (x + y, x + y) - (x, x) - (y, y)$, скалярные произведения различных векторов также совпадают в этих двух смыслах. Поэтому, значения первой квадратичной формы на касательных векторах не зависят от системы координат.

Билет 26.

Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.

Ниже в формулах знах суммирования будет опускаться. Суммирование предполагается по повторяющимся индексам сверху и снизу.

Отметим также, что далее рассматриваются поверхности размерности n в пространстве размерности $n+1$ (гиперповерхности).

Пусть M – n-мерная поверхность в R^{n+1}. Фиксируем точку $P \in M$. Пусть $U \subseteq R^n$, $r(u^1, \dots, u^n) : U \to R^{n+1}$ задает локальные координаты в окрестности точки P. Через T_PM обозначается касательное пространство к M в точке P. Базис в T_PM образуют вектора $v_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}\Big|_P$. Через $g_{ij}(P)$ будем обозначать матрицу первой квадратичной формы в точке P, она является положительно определенной.

Множество всех векторов в точке P образует линейное пространство R^{n+1}, в котором T_PM является линейным подпространством. Пусть N – единичный вектор, нормальный к T_PM в R^{n+1} (таких векторов ровно 2), он называется нормальным к M в точке P. Он будет единственным, если потребовать, чтобы базис $v_1, \dots, v_n, N$ был правильно ориентирован в R^{n+1}, но это условие уже завистит от системы координат в M.

Положим

$$q_{ij}(P) = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\Big|_P, N(P) \right)$$

и вычислим, как q_{ij} изменяется при заменах координат (обозначения прежние):

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^k \partial v^s}, N \right) = \left(\frac{\partial}{\partial v^s} \left(\frac{\partial r}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \right), N \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial v^s} \frac{\partial u^i}{\partial v^k}, N \right) + \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^k \partial v^s} \frac{\partial r}{\partial u^i}, N \right) =$$

и второе слагаемое равно нулю, поскольку $\frac{\partial r}{\partial u^i}$ ортогонально N по определению последнего; далее,

$$= \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^s} \frac{\partial u^i}{\partial v^k}, N \right) = \frac{\partial u^j}{\partial v^s} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, N \right) = \frac{\partial u^j}{\partial v^s} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} q_{ij}$$

Итак, q_{ij} изменяется при заменах координат так же, как и g_{ij}, в силу чего тоже задает квадратичную форму в T_PM.

Определение. *Она называется второй квадратичной формой поверхности M.*

Отметим, что она может уже не быть знакоопределенной, хотя и симметрична (в силу симметричности второй производной по переменным).

Пусть φ – кривая на поверхности, $P = \varphi(0)$. Пусть, кроме того, кривая параметризована натуральным параметром (то есть, длина касательного вектора $\dot\varphi(t)$ в любой точке кривой равна 1). Тогда вектор $\ddot\varphi(t)$ ему ортогонален ($(\dot\varphi, \dot\varphi) = 1$, дифференцируя, находим $2(\dot\varphi, \ddot\varphi) = 0$). Разложим этот вектор:

$$\ddot\varphi(t) = k(s) \cdot n(s), \qquad k(s) > 0, \quad ||n(s)|| = 1$$

Это разложение единственно. Вектор $n(s)$ называется нормалью к кривой, число $k(s)$ – кривизной кривой. С другой стороны,

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial (r\circ\gamma)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial \gamma^i}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\partial \gamma^i}{\partial t}\frac{\partial \gamma^j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial u^i}\frac{\partial^2 \gamma^i}{\partial^2 t}$$

Умножим это равенство скалярно на N. Второе слагаемое в правой части обратится в 0, поскольку вектор $\frac{\partial r}{\partial u^i}$ ортогонален n. В первом же слагаемом получим скалярное произведение $\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$ на N, которое равно q_{ij}. Итак,

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}\frac{\partial \gamma^i}{\partial t}\frac{\partial \gamma^j}{\partial t} = (\ddot{\varphi}(t), N) = (k(s)n(s), N) = k(s)\cos\alpha$$

где α – угол между n и N. С другой стороны, в левой части стоит $q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})$, и получается равенство

$$q(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) = k(s)\cos\alpha$$

верное, если длина $\dot{\gamma}$ равна 1. Далее, рассмотрим другую параметризацию кривой (отличную от натуральной). Кривизна и нормаль являются инвариантными величинами (не зависят от параметризации). С другой стороны, при другой параметризации касательный вектор изменят только свою длину, поэтому левая часть последней формулы сохранится, если его нормировать. Иначе говоря,

$$k(s)\cos\alpha = q\left(\frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}, \frac{\dot{\gamma}}{||\dot{\gamma}||}\right) = \frac{q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}{||\dot{\gamma}||^2} = \frac{q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}$$

Последний переход следует из того,что длина вектора в смысле скалярного произведения g равен его длине в R^{n+1}.

Полученное равенство называется

Теорема. (О паре форм).

$$k(s) = \frac{q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}\frac{1}{\cos\alpha}$$

В частности, если $n = N$,

$$k_n(s) = \frac{q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}{g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}$$

это выражение называется нормальной кривизной.

Определение. *Нормальная кривизна кривой есть кривизна кривой, проходящей через эту точку, имеющей тот же вектор $\dot{\gamma}$, но $n = N$.*

Например, указанная в определении кривая может быть построена как кривая в пересечении поверхности с двумерной плоскостью, натянутой на вектора N и $\dot{\gamma}$.

Получаем

Теорема. (Менье).

$$k = \frac{k_n}{\cos\alpha}$$

Билет 27.

Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Ниже в формулах знак суммирования будет опускаться. Суммирование предполагается по повторяющимся индексам сверху и снизу.

Рассмотрим поверхность M, точку $P \in M$ и касательное пространство $T_P M$ к M в точке P. В этом пространстве определены две симметричные билинейные формы - первая G и вторая Q, при этом форма G положительно определена, и задает скалярное произведение. Базисы, в которых матрица G единична, существуют, и называются ортонормированными. Поскольку Q симметрична, существует ортонормированный базис, в котором матрица Q диагональна, $Q = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Пусть соответствующий базис $e_1, \dots, e_n$. Произвольный вектор v раскладывается по нему $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$, тогда нормальная кривизна в направлении v, $k(v)$, вычисляется как

$$k(v) = \frac{q(v,v)}{g(v,v)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (v^i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (v^i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cos^2 \varphi_i$$

где

$$\cos \varphi_i = \frac{v^i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (v^i)^2}}$$

косинус угла между v и e_i (направляющий косинус).

Определение. *Числа λ_i называются главными кривизнами поверхности, вектора e_i – главными направлениями.*

Предложение. *Главные направления и главные кривизны не зависят от системы координат.*

Доказательство.

Главные кривизны и главные направления получаются в базисе из e_i как решения уравнений соответственно

$$\det(Q - \lambda G) = 0 \quad (Q - \lambda_i G) e_i = 0$$

Покажем, что решения этих уравнений не зависят базиса и от системы координат. Рассмотрим другую систему координат. В матричном виде формулы перехода примут вид

$$Q = C^t Q' C \quad G = C^t G' C \quad e = C^{-1} e'$$

где C есть матрица из $\frac{\partial v^i}{\partial u^j}$. Последнее уравнение описывает изменение координат касательного вектора при замене базиса в $T_P M$. Оно будет таким, поскольку сами базисные вектора преобразуются как

$$v_i = \frac{\partial r}{\partial u^i} = \frac{\partial r}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = v_i' C$$

откуда C есть матрица перехода, а потому координаты векторов умножаются на C^{-1}.

Подставляя выражения для перехода в уравнения, убеждаемся, что решения старых уравнений остаются решениями новых.

$\square$

Вернемся к формуле для $k(v)$. В двумерном случае $\varphi_2 = \pi/2 - \varphi_1$ (здесь используется ортогональность v_1 и v_2), и формула принимает вид

$$k = \lambda_1 \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2 \cos^2 \varphi_2 = \lambda_1 \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2 \sin^2 \varphi_1 = (*)$$

Полученная формула называется *формулой Эйлера*.

Переписав ее в виде

$$(*) = \lambda_1(1 - \sin^2 \varphi_1) + \lambda_2 \sin^2 \varphi_1 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 \varphi_1$$

получим, что λ_1 и λ_2 являются экстремальными значениями нормальной кривизны как функции направления.

Определение. *Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной поверхности, сумма – средней кривизной.*

Список литературы

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры.

[2] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра.

[3] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. III. Основные структуры алгебры.

[4] Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

[5] Александров П.С. Курс по аналитической геометрии и линейной алгебре.

[6] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.

[7] Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств.

[8] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ.

[9] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, тт. 1, 2, 3.

[10] Рудин У.Л. Основы математического анализа.

[11] Никольский С.М. Математический анализ.

[12] Степанов В.В. Курс дифференциальный уравнений.

[13] Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

[14] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[15] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[16] Привалов Н.Н. Введение в теорию функций комплексных переменных.

[17] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций.

[18] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.

[19] Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия.

[20] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.

[21] Гнеденко Б.В. Очерк по истории математики в России и СССР.

[22] Рыбников К.А. История математики.